POPULÄR

Jörg Bewersdorff

Glück, Logik und Bluff

Mathematik im Spiel – Methoden, Ergebnisse und Grenzen

5. Auflage

VIEWEG+
TEUBNER

Jörg Bewersdorff

Glück, Logik und Bluff

Jörg Bewersdorff

Glück, Logik und Bluff

Mathematik im Spiel – Methoden, Ergebnisse und Grenzen

5., aktualisierte Auflage

POPULÄR

VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dr. Jörg Bewersdorff
Josef-Mehlhaus-Straße 8
65549 Limburg
mail@bewersdorff-online.de

www.bewersdorff-online.de

1. Auflage August 1998
2., durchgesehene Auflage Februar 2001
3., überarbeitete Auflage 2003
4., durchgesehene und ergänzte Auflage 2007
5., aktualisierte Auflage 2010

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.
Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Umschlagmotiv: Ulrike Weigel, www.corporatedesigngroup.de
Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0775-5

Einführung

Das Abenteuergefühl ist ein Element des Spiels. Wir setzen uns der Ungewissheit des Schicksals aus und erleben, wie wir es durch unsere eigene Tätigkeit in den Griff bekommen.
Alex Randolph, Spieleautor[1]

Die Ungewissheit im Gesellschaftsspiel

Warum spielen wir? Woher rührt der Reiz eines Spiels? Was bringt Menschen dazu, oft stundenlang zu spielen? Wo bleibt die Langweile, wenn immer wieder das gleiche Spiel gespielt wird? Wirklich das gleiche Spiel?

Wirklich gleich bleiben bei einem Spiel nur seine Regeln, Verlauf und Ausgang ändern sich hingegen von Partie zu Partie. Die Zukunft bleibt zunächst im Dunklen – wie im richtigen Leben, aber auch wie im Roman, im Spielfilm und beim sportlichen Spiel. Das sorgt für Unterhaltung und erzeugt zugleich Spannung.

Verstärkt wird die Spannung durch die Möglichkeit zum Gewinn. Jeder Spieler hofft zu gewinnen – um einen materiellen Gewinn zu erlangen, in der Hoffnung auf ein kurzes Glücksgefühl, als Selbstbestätigung oder im Hinblick auf Anerkennung. Egal, um was es „geht", jeder Spieler kann hoffen. Sogar ein Verlierer darf wieder Hoffnung schöpfen, wenn das Spiel weiter geht: „Neues Spiel – neues Glück". Dabei wirkt die Hoffnung auf einen Gewinn oft stärker als das Wissen über schlechte Gewinnchancen. Die Popularität von Kasino- und Lotteriespielen beweist das ständig neu.

Unterhaltung und allseitige Gewinnhoffnung haben dieselbe Basis, nämlich die Abwechslung im Spiel. Durch sie bleiben die Spieler lange im Ungewissen über die weitere Entwicklung einer Partie bis hin zu deren Resultat. Wie aber kommt es zu dieser Ungewissheit? Welche Mechanismen des Spiels verursachen sie? Bereits anhand von Spielen wie Roulette, Schach und Pokern lassen sich drei prinzipiell verschiedene Typen von Ursachen erkennen:

1. Zufall.
2. Vielfältige Kombinationen der möglichen Züge.
3. Unterschiedlicher Informationsstand der einzelnen Spieler.

1. Zufällige Einflüsse treten bei Gesellschaftsspielen in der Hauptsache beim Würfeln auf, ebenso beim Mischen von Spielkarten und -steinen. Der Verlauf einer Partie wird dann im Rahmen der Spielregeln sowohl von Entscheidungen der Spieler, als auch den Ergebnissen zufälliger Prozesse bestimmt. Dominiert der Einfluss des Zufalls gegenüber denen der Spieler, spricht man von Glücksspielen. Bei reinen Glücksspielen ist die Entscheidung eines

[1] Zitiert nach Spielbox 1985/1, S. 30. Alex Randolph ist Autor so bekannter Spiele wie Twixt, Geister und Hol's der Geier sowie Mitautor von Sagaland. Die vollständige Liste mit über fünfzig Titeln findet man im jährlich neu erscheinenden Taschenbuch *Spiel* des Friedhelm Merz Verlages, Bonn.

Spielers über die Teilnahme und die Höhe des Einsatzes bereits die wichtigste. Glücksspiele, die um Geld gespielt werden, unterliegen traditionell gesetzlichen Reglementierungen[I, 2].

2. Im Allgemeinen erhalten die Spieler während des Verlaufs einer Partie in genau festgelegten Situationen die Gelegenheit zu handeln. Zur Auswahl stehen dabei bestimmte, durch die Spielregeln fixierte Handlungsmöglichkeiten. Ein Spielabschnitt, der genau eine solche Handlungsmöglichkeit eines Spielers umfasst, wird Zug genannt. Bereits nach wenigen Zügen können sich die erlaubten Möglichkeiten zu einer kaum noch überschaubaren Vielfalt kombinieren, so dass die Konsequenzen eines einzelnen Zuges nur noch schwer zu erkennen sind. Genau diesem Umstand verdanken Schachaufgaben vom Typ „Matt in zwei Zügen" ihre Schwierigkeit. Spiele, bei denen die Ungewissheit ganz auf den vielfältigen Zugmöglichkeiten beruht, werden kombinatorische Spiele genannt. Bekannte Vertreter dieser Klasse von Spielen sind Brettspiele wie Schach, Go, Mühle, Dame, Halma und Reversi. Zu den Spielen, die sowohl kombinatorische wie zufällige Elemente besitzen, gehören Backgammon und „Mensch ärgere dich nicht", wobei der kombinatorische Charakter beim Backgammon deutlich ausgeprägter ist als beim „Mensch ärgere dich nicht".

3. Eine dritte Ursache, die bei Spielern eine Ungewissheit über den weiteren Spielverlauf verursachen kann, entsteht, wenn die Spieler unterschiedliche Informationen über den erreichten Spielstand besitzen und damit ein einzelner Spieler nicht unbedingt die Informationen hat, über die die Spieler insgesamt verfügen. So muss ein Pokerspieler seine Entscheidungen treffen, ohne dass er die Karten seiner Gegner kennt. Man könnte nun argumentieren, dass auch beim Backgammon gezogen werden muss, ohne die künftigen Würfelergebnisse zu kennen. Jedoch besteht zwischen Pokern und Backgammon ein gravierender Unterschied: Die weiteren Würfelergebnisse kennt kein Spieler, hingegen sind die bereits verteilten Karten einem Teil der Spieler bekannt – jeder sieht zunächst nur seine eigenen Karten. Spiele, deren Teilnehmer vorwiegend aufgrund solcher imperfekter Information im Ungewissen über den weiteren Spielablauf sind, werden strategische Spiele genannt; in reiner Form sind sie allerdings sehr selten. Imperfekte Information ist ein typisches Element der meisten Kartenspiele wie Pokern, Skat und Bridge. Bei den Brettspielen Geister und Stratego beruht die imperfekte Information darauf, dass man zunächst nur den Ort, nicht aber den Typ der gegnerischen Steine kennt[3]. Bei Diplomacy[4] und Papier-Stein-Schere[5] ziehen die Spieler gleich-

2 Römische Zahlen I, II, ... weisen auf zumeist umfangreichere Anmerkungen am Ende des Buches hin.

3 Geister und Stratego sind Brettspiele für zwei Personen, bei denen jeder Spieler von den Steinen seines Gegners nur die neutrale Rückseite sieht. Zunächst sind einem Spieler also nur die eigenen Spielsteine und die Positionen der gegnerischen Steine bekannt. Bei Geister, das auf einem Schachbrett mit je vier guten und schlechten Geistern auf beiden Seiten gespielt wird, werden nur die geschlagenen Figuren enttarnt. Bei Stratego ist die Schlagkraft einer Figur abhängig vom militärischen Rang. Daher muss eine Figur zum Zeitpunkt eines Schlagabtauschs dem Gegner offen gelegt werden.
Die einfachen Regeln von Geister und eine kommentierte Partie findet man in Spielbox 1984/3, S. 37-39. Taktische Hinweise zu Stratego sind in Spielbox 1983/2, S. 37 f. beschrieben.

4 Diplomacy ist ein Klassiker unter den Gesellschaftsspielen. Erfunden wurde es 1945 von Alan Calhamer. Unter Einschluss von Absprachen, die zwischen den Mitspielern getroffen werden können, sind entscheidende Regionen des Spielplans, der Europa vor dem Ersten Weltkrieg darstellt, unter eigene Kontrolle zu stellen. Der besondere Charakter von Diplomacy rührt daher, dass das Schließen und Aufkündigen von Bündnissen geheim gegenüber Dritten verhandelt werden kann. Einen Überblick über Diplomacy vermittelt ein Artikel in Spielbox 1983/2, S. 8-10 sowie ein vom Erfinder verfasstes Kapitel in David Pritchard (ed.), *Modern board games*, London 1975, S. 26-44.

zeitig, so dass jedem Spieler die Information über den aktuellen Zug der Gegner fehlt. Wie sich die imperfekte Information in einem Spiel konkret auswirkt, lässt sich am besten verdeutlichen, wenn die Spielregeln so abgeändert werden, dass ein neues Spiel mit perfekter Information entsteht. Bei Kartenspielen müssen dazu die Spieler ihre Karten offen auslegen; Poker würde auf diese Weise zur Farce, Skat bliebe immerhin ein kombinatorisch interessantes Spiel ähnlich der halb-offenen Zwei-Personen-Variante. Neben dem Spiel Papier-Stein-Schere, bei dem es sich um ein rein strategisches Spiel handelt, erkennt man auf diese Weise auch Pokern als ein überwiegend strategisches Spiel.

Bild 1 Die drei Ursachen der Ungewissheit in Gesellschaftsspielen: Gewonnen wird mit *Glück, Logik und Bluff*.

Zu fragen bleibt, ob die Ungewissheit über den weiteren Spielverlauf noch auf anderen, bisher nicht erkannten Ursachen beruhen kann. Untersucht man eine Vielzahl von Spielen nach solchen Ursachen, dann stößt man im Wesentlichen auf die folgenden Erscheinungen:

- Das Ergebnis eines Spieles kann von der körperlichen Geschicklichkeit und Leistungsfähigkeit abhängen. Außer den Sport- und Computerspielen, die sicherlich nicht zu den Gesellschaftsspielen gehören, ist beispielsweise Mikado ein Spiel, das manuelle Geschicklichkeit erfordert.
- Die Spielregeln an sich können den Spielern zum Teil unklar sein. Insbesondere in der Lernphase komplizierter Spiele kommt es zu solchen Situationen. In anderen Fällen ergeben sich Zweifelsfälle zwangsläufig aus der Natur des Spiels. So kann es beim Kreuzworträtsel-artigen Spiel Scrabble unklar sein, ob ein Wort zulässig ist oder nicht. Und selbst beim Skat bleibt das in Altenburg tagende Skatgericht bei der Klärung von Streitfragen nicht unbeschäftigt, auch wenn es meist nur mit nebensächlichen Details befasst ist.
- Ein unvollkommenes Gedächtnis vergrößert nicht nur beim Memory die persönliche Ungewissheit. Allerdings ist diese Art der Ungewissheit keine objektive Eigenschaft des betreffenden Spiels.

Im Vergleich zu Zufall, Kombinationsreichtum und unterschiedlichen Informationsständen können die zuletzt genannten Phänomene allesamt vernachlässigt werden. Keins von ihnen

[5] Zwei Spieler entscheiden völlig frei, aber gleichzeitig für je eine der drei Alternativen „Papier", „Stein" oder „Schere". Haben beide Spieler die gleiche Wahl getroffen, endet die Partie unentschieden. Ansonsten übertrifft („schleift") der „Stein" die „Schere", das „Papier" schlägt („umwickelt") den „Stein", und die „Schere" übertrifft („schneidet") das „Papier".

ist als typische und objektive Ursache für die Ungewissheit innerhalb eines Gesellschaftsspiels anzusehen.

Spiel und Mathematik

Will ein Spieler die Gewinnaussichten zu seinen Gunsten verbessern, muss er zunächst versuchen, seine persönliche Ungewissheit möglichst weitgehend zu überwinden, um dann die Konsequenzen seiner möglichen Handlungen abzuwägen. Wie er dabei vorzugehen hat, hängt selbstverständlich davon ab, welche konkreten Ursachen für seine Ungewissheit verantwortlich sind: Will ein Spieler beispielsweise entscheiden, ob er an einem Glücksspiel teilnehmen soll oder nicht, dann muss er die Gewinnchancen dahingehend abschätzen, ob sie im Vergleich zum Einsatz attraktiv sind. Ein Schachspieler dagegen hat zu seinem ins Auge gefassten Zug alle möglichen Gegenzüge zu prüfen und zu jedem von ihnen mindestens eine erfolgreiche Antwort parat zu haben. Ein Pokerspieler schließlich muss versuchen zu ergründen, ob das hohe Gebot seines Gegners auf einem guten Blatt basiert oder ob es sich nur um einen Bluff handelt. Alle drei Probleme lassen sich nicht nur im Einzelfall spielerisch, sondern auch in prinzipieller Hinsicht untersuchen. Welche mathematische Methoden dafür entwickelt wurden, soll im vorliegenden Buch anhand von möglichst plakativen Beispielen vorgestellt werden:

- Glücksspiele können mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung analysiert werden. Diese mathematische Disziplin, die heute in vielfältiger Weise in Natur-, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften angewendet wird, verdankt sogar ihre Entstehung im 17. Jahrhundert dem Wunsch, die Gewinnchancen von Glücksspielen berechnen zu können.
- Für die kombinatorischen Elemente in Spielen gibt es keine einheitliche Theorie. Jedoch können mit den unterschiedlichsten mathematischen Methoden sowohl prinzipielle als auch für Einzelfälle konkrete Resultate erzielt werden.
- Ausgehend von den strategischen Komponenten eines Spieles wurde eine eigene mathematische Disziplin begründet, die so genannte Spieltheorie. Spiele fungieren dort als Modell, auf deren Basis interaktive, ökonomische Prozesse in Abhängigkeit von getroffenen Entscheidungen untersucht werden.

Für alle drei Spieltypen und ihre mathematischen Methoden gilt, dass mit Hilfe von Computern ansonsten unerreichbare Anwendungen realisiert werden können. Aber auch unabhängig von der Entwicklung immer schnellerer Computer hat es bei den betreffenden mathematischen Theorien im 20. Jahrhundert große Fortschritte gegeben. Das mag den einen oder anderen mathematischen Laien vielleicht überraschen – besitzt die Mathematik doch oft völlig zu unrecht den Ruf, ihre Entwicklung sei schon lange abgeschlossen.

Der Ausgangspunkt der **Wahrscheinlichkeitsrechnung** liegt in Fragen wie derjenigen, welcher Spieler in einem Glücksspiel die besten Chancen hat zu gewinnen. Zentraler Begriff ist die Wahrscheinlichkeit, die als Maß für die Gewissheit interpretiert werden kann, mit der ein zufälliges Ereignis eintritt. Für Glücksspiele interessiert natürlich letztlich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass ein bestimmter Spieler gewinnt. Häufig muss aber nicht nur der Gewinn als solches, sondern zugleich auch seine Höhe berücksichtigt werden. Zu berechnen sind dann der durchschnittliche Gewinn und das mit dem Spiel verbundene Risiko. Aber nicht immer muss ein Spiel vollständig analysiert werden, beispielsweise dann, wenn nur unterschiedliche Zugmöglichkeiten gegeneinander abzuwägen sind und das im direkten Vergleich geschehen kann. Bei Wettrennen auf Würfelbasis stellen sich dabei Fragen der Art, wie lange ein Spielstein durchschnittlich dafür braucht, eine bestimmte Wegstrecke zurückzulegen. Besonders kompliziert sind solche Berechnungen dann, wenn wie beim Leiterspiel ein Spielstein auch wieder zurückfallen kann. Auch die Antwort auf die Frage nach der Bevorzugung von bestimmten Feldern beim Monopoly verlangt ähnliche Berechnungs-Techniken. Schwierig zu analysieren sind ebenso solche Glücksspiele, die ausgeprägte kombinatorische Spielelemente beinhalten. Erstmals bewältigt wurden solche Schwierigkeiten bei der Analyse des Black Jacks.

Kombinatorische Spiele, namentlich die traditionsreichen Vertreter Schach und Go, gelten als Spiele mit hohem intellektuellen Anspruch. Schon früh in der Entwicklungsgeschichte der Rechenmaschinen reifte daher der Wunsch heran, in Maschinen ebenbürtige Spielgegner finden zu können. Wie aber lässt sich das realisieren? Dafür benötigt werden Rechenverfahren, mit denen ausreichend gute Züge gefunden werden können. Kann die Güte eines Zuges aber überhaupt eindeutig bewertet werden oder hängt sie nicht immer von der gegnerischen Antwort ab? Immerhin ist der Suchverfahren und Computertechnik umfassende aktuelle Stand der Technik beeindruckend. Ein durchschnittlicher Schachspieler besitzt nämlich gegen die besseren Schachprogramme kaum noch eine Chance. Aber nicht nur Schach war Gegenstand des mathematischen Interesses. Für viele Spiele konnten, zum Teil auf überraschend einfache Weise, sichere Gewinnstrategien gefunden werden. Bei anderen Spielen kann seltsamerweise nur bestimmt werden, welcher Spieler theoretisch stets gewinnen kann, ohne dass bis heute eine Gewinnstrategie konkret bekannt ist. Einige dieser Spiele besitzen sogar Eigenschaften, die kaum eine Hoffnung bestehen lassen, je eine solche Gewinnstrategie zu finden.

In welcher Weise sich strategische Spiele prinzipiell von zufälligen und kombinatorischen Spielen unterscheiden, davon handeln die Grundlagen der **Spieltheorie**. Am Beginn steht eine mathematisch formale Definition eines Spiels. Charakterisiert wird ein Spiel durch seine Regeln, und diese umfassen die folgenden Angaben:

- Die Anzahl der Mitspieler.
- Zu jedem Spielstand die Aussage darüber,
  - wer am Zug ist,
  - welche Zugmöglichkeiten für den betreffenden Spieler bestehen und
  - auf Basis welcher Informationen er seine Entscheidung zu treffen hat.
- Für beendete Partien, wer wie viel gewonnen hat.
- Bei Zufallszügen, wie wahrscheinlich die möglichen Ergebnisse sind.

Als eigenständige Disziplin entstand die Spieltheorie erst 1944, als fast aus dem Nichts eine monumentale Monographie über die Theorie der Spiele erschien. Auch wenn sich dieses Werk an verschiedenen Stellen Spielen wie Schach, Bridge und Pokern widmet, sind für die Spieltheorie wirkliche Gesellschaftsspiele im Vergleich zu ökonomischen Prozessen eigentlich nachrangig. Dass sich Spiele überhaupt als Modell für reale Abläufe eignen, überrascht eigentlich nicht. Schließlich sind viele Spielelemente Konflikten um Geld, Macht oder gar Leben entlehnt. Insofern bietet sich die „Umkehrung" geradezu an, dass heißt, die Interaktion von Individuen – ob in Konkurrenz oder in Kooperation – auf der Basis eines an Spielen angelehnten Modells zu beschreiben und zu untersuchen. Die weitgehende Idealisierung ist dabei genauso unvermeidbar, wie es bei anderen Modellen der Fall ist, etwa wenn in der Physik eine Masse als auf einen Punkt konzentriert angenommen wird.

Über dieses Buch

Entsprechend der beschriebenen Systematik gliedert sich der nachfolgende Text in drei Teile, in denen nacheinander zufällige, kombinatorische und strategische Spielelemente mathematisch untersucht werden. Jeder der drei Teile umfasst mehrere Kapitel, die jeweils ein abgegrenztes Problem – meist ein einzelnes Spiel oder Spielelement – zum Gegenstand haben.

Um einen möglichst breiten Leserkreis erreichen zu können, wurde bewusst von einer Darstellung abgesehen, wie sie im Hinblick auf Allgemeinheit, Formalismus und Vollständigkeit in Lehrbüchern üblich und angebracht ist. Im Blickpunkt stehen vielmehr Ideen, Begriffe und Techniken, die soweit vermittelt werden, dass sie auf andere Spiele übertragen werden können.

Aufgrund der problemorientierten Themenauswahl differiert das mathematische Niveau bei den verschiedenen Kapiteln zum Teil erheblich. Obwohl Bezüge auf vorangegangene Kapitel zahlreich sind, können die Kapitel oft unabhängig voneinander gelesen werden. Jedes Kapitel beginnt mit einer, manchmal mehr oder weniger rhetorisch gemeinten Frage, die zugleich Natur und Schwierigkeit des im betreffenden Kapitel behandelten Problems offenbart. Dem (der) mathematisch bestens vorgebildeten Leser(in)[6], für den (die) der hier gebotene Überblick in vielen Fällen zu oberflächlich und unvollständig bleiben muss, ermöglicht diese Struktur eine schnelle und gezielte Auswahl der für ihn (sie) interessanten Teile – die angegebene Fachliteratur weist den weiteren Weg. Ebenso zum Weiterlesen anregen sollen die angeführten Zitate sowie die Ausblicke auf mathematische Hintergründe und verwandte, außerhalb des eigentlichen Themenbereichs liegende Probleme und Sachverhalte.

Deutlichen Wert gelegt wird auf die historische Entwicklung, und zwar zum einen, weil zumindest der jüngere Aufschwung der Mathematik weit weniger bekannt ist als der der Naturwissenschaften, zum anderen, weil es durchaus spannend sein kann, persönlichen Irrtum und Erkenntnisgewinn der zeitraffermäßig verkürzten Entwicklung zuordnen zu können. Wie stark die mathematische Forschung auch im – nicht unbedingt repräsentativen – Bereich der Spiele gerade in den letzten Jahrzehnten vorangeschritten ist, macht ein Vergleich mit thematisch ähnlich abgegrenzten, im Detail allerdings oft anders ausgerichteten Zusammenstellungen deutlich, deren Erscheinen vor der Entdeckung vieler der hier beschriebenen Ergebnisse datiert ist:

[6] *Der* Spieler, *der* Verlierer, *sein* fehlerhafter Zug alle diese Bezeichnungen sind im folgenden genauso wenig geschlechtsspezifisch gemeint wie *der* Hund, *die* Katze und *das* Pferd. Die Möglichkeit, mathematisch-formal in *dem* Spieler nicht *eine* Person, sondern auch in grammatikalischer Sicht geschlechtsneutral *das* Element einer entsprechenden Menge zu sehen, erschien unter dem Blickwinkel der Verständlichkeit genauso wenig sinnvoll wie der ständige Gebrauch doppelter Genera.

- René de Possel, *Sur la théorie mathématique des jeux de hasard et de réflexion*, Paris 1936, Reprint in: Hevre Moulin, *Fondation de la théorie des jeux*, Paris 1979
- R. Vogelsang, *Die mathematische Theorie der Spiele*, Bonn 1963;
- N. N. Worobjow, *Die Entwicklung der Spieltheorie*, Berlin (-Ost) 1975 (russ. Orig. 1973) – Hauptgegenstand ist die Spieltheorie als mathematische Disziplin, jedoch wird für die Theorien von Glücksspielen, kombinatorischen und strategischen Spielen in I. §§2-5 ein Abriss der historischen Entwicklung gegeben[7];
- Richard A. Epstein, *The theory of gambling and statistical logic*, New York 1967 (erweiterte Neuauflage 1977);
- Edward Packel, *The mathematics of games and gambling*, Washington 1981.
- John D. Basley, *The mathematics of games*, Oxford 1989.
- *La mathématique des jeux*, Bibliothèque pour La Science, Paris 1997 – Beiträge zum Thema Spiel und Mathematik der französischen Ausgabe von Scientific American, die nur zum Teil auch in anderen Länderausgaben veröffentlicht wurden.

Nicht versäumen möchte ich es, meinen Dank an all jene auszusprechen, die bei der Entstehung dieses Buchs behilflich waren: Elwyn Berlekamp, Richard Bishop, Olof Hanner, Julian Henny, Daphne Koller, Martin Müller, Bernhard von Stengel und Baris Tan erläuterten mir freundlicherweise ihre Forschungsergebnisse. Bernhard von Stengel verdanke ich darüber hinaus einige Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge und nicht zuletzt die Ermutigung, den Weg zu einer Publikation zu suchen. Angesichts des umfangreichen Quellenstudiums nicht vergessen werden soll die mir zuteil gewordene Unterstützung durch Mitarbeiter der von mir genutzten Bibliotheken – stellvertretend auch für die anderen seien hier nur die Bibliothek des Mathematischen Instituts in Bonn, die Bibliothek des Instituts für Diskrete Mathematik in Bonn sowie die Universitätsbibliotheken Bonn und Bielefeld genannt. Frauke Schindler vom Lektorat des Vieweg-Verlages und Karin Buckler haben viel dazu beigetragen, die Zahl *meiner* Fehler zu verringern. Dem Vieweg-Verlag, namentlich seiner Programmleiterin Ulrike Schmickler-Hirzebruch, habe ich dafür zu danken, diese sicher aus dem üblichen Rahmen fallende Zusammenstellung ins Verlagsprogramm aufgenommen zu haben. Last not least gilt mein ganz besonderer Dank meiner Frau Claudia, deren Verständnis ich in den letzten Jahren leider viel zu oft strapaziert habe.

Vorwort zur zweiten Auflage

Der erfreuliche Umstand, dass die erste Auflage nach nur zwei Jahren vergriffen ist, gibt mir Gelegenheit, zwischenzeitlich entdeckte Druckfehler zu beseitigen. Außerdem konnten einige Literaturverweise und Hinweise auf neuere Untersuchungen ergänzt werden. Danken möchte ich Hans Riedwyl, Jürg Nievergelt und Aviezri S. Fraenkel für ihre Anmerkungen.

Hinweisen möchte ich schließlich noch auf meine Web-Seite www.bewersdorff-online.de, auf der ich Ergänzungen und Korrekturen veröffentliche.

7 Darüber hinaus verdankt der Autor den Ausführungen Worobjows aus Teil I wesentliche Einsichten, wie sie insbesondere auch in die Einführung eingeflossen sind.

Vorwort zur dritten Auflage

Wieder habe ich aufmerksamen Lesern zu danken, die mich freundlicherweise auf Druckfehler in vorangegangenen Auflagen hingewiesen haben: Pierre Basieux, Ingo Briese, Dagmar Hortmeyer, Jörg Klute, Norbert Marrek, Ralph Rothemund, Robert Schnitter und Alexander Steinhansens. In dieser Hinsicht besonders danken möchte ich David Kramer, der derzeit das vorliegende Buch ins Englische übersetzt.

Die Notwendigkeit zu inhaltlichen Ergänzungen ergaben sich aufgrund von einigen zwischenzeitlich publizierten Arbeiten, darunter insbesondere Dean Allemangs Untersuchung über die Misère-Version von Nim-Spielen sowie Elwyn Berlekamps Idee des Environmental Go. Auch der Anregung von Lesern, neuere Ansätze bei Spielbaum-Suchverfahren zu ergänzen, habe ich gerne entsprochen.

Vorwort zur vierten Auflage

Für Hinweise auf Druckfehler habe ich diesmal Benno Grabinger und nochmals David Kramer zu danken. Ergänzt wurde ein Überblick über neue Ansätze zur Untersuchung der Misère-Version von Nim-Spielen, die Thane Plambeck 2005 veröffentlicht hat.

Vorwort zur fünften Auflage

Für Hinweise auf Druckfehler danke ich Winfried Borchardt, Wolfgang Götz und Sophie Rabe. Ergänzt wurden neuere Ergebnisse über die amerikanische Dame-Variante sowie ein Überblick über Machine-Learning- und Monte-Carlo-Ansätze bei der Spielbaumsuche.

JÖRG BEWERSDORFF[8]

[8] Unter mail@bewersdorff-online.de sind Hinweise auf Fehler und Unzulänglichkeiten willkommen. Auch Fragen werden, soweit es mir möglich ist, gerne beantwortet.

Inhaltsverzeichnis

1 Glücksspiele

1.1 Würfel und Wahrscheinlichkeit

Mit einem Würfelpaar kann die Summe 10 durch 5 + 5 oder 6 + 4 erreicht werden. Auch die Summe 5 lässt sich auf zwei Arten, nämlich durch 1 + 4 oder 2 + 3, erzielen. Trotzdem tritt die Würfelsumme 5 in längeren Versuchsreihen erfahrungsgemäß häufiger als die 10 auf. Warum?

Obwohl wir in unserer Umgebung in vielfältiger Weise dem Zufall ausgesetzt sind, waren es maßgeblich Fragen über Glücksspiele, die zu den ersten mathematischen Untersuchungen von zufälligen Erscheinungen führten. Abgesehen davon, dass es höchst attraktiv sein kann, Wege zum Gewinn zu suchen und zu finden, haben Glücksspiele auch den Vorteil, dass bei ihnen der Zufall in genau fixierten Bahnen wirkt. So ist die zufallsbedingte Ungewissheit, eine Sechs zu werfen, einfacher erfassbar als wenn es darum geht, ob am 12. Juli des nächsten Jahres ein Blitz in den Eiffelturm einschlagen wird. Das liegt in erster Linie daran, dass Glücksspiele unter gleichen Bedingungen reproduzierbar sind und theoretische Ergebnisse daher relativ einfach in Versuchsreihen überprüft werden können, wenn sie nicht ohnehin schon als Erfahrungstatsache bekannt sind.

Die ersten systematischen Untersuchungen von Glücksspielen stammen aus der Mitte des 17. Jahrhunderts. Punktuelle Untersuchungen gab es allerdings schon vorher. So wurde bereits im 13. Jahrhundert das eingangs gestellte Problem der Augensummen von Würfeln korrekt gelöst[9], was insofern eine besondere Beachtung verdient, da aus den nachfolgenden Jahrhunderten mehrere fehlerhafte Analysen zum gleichen Thema bekannt sind. Einen universellen Ansatz zur Beschreibung zufälliger Probleme schuf zuerst Jakob Bernoulli (1654-1705) mit seiner *Ars coniectandi*, der Kunst des Vermutens. Ihr Gegenstand ist es nach Bernoulli, „so genau wie möglich die Wahrscheinlichkeit der Dinge zu messen und zwar zu dem Zwecke, dass wir bei unseren Urteilen und Handlungen stets das auswählen und befolgen können, was uns besser, trefflicher, sicherer oder ratsamer erscheint“[10]. Im Auge hatte er dabei nicht nur Glücksspiele sondern auch Probleme des Alltags. Bernoullis Anspruch an eine mathematische Theorie des Zufalls ist noch heute aktuell. So formulierte der bekannte Physiker Richard Feynman (1918-1988) in kaum übertreffbarer Schlichtheit: „Die Theorie der Wahrscheinlichkeit ist ein System, das uns beim Raten hilft“.

---

[9] R. Ineichen, *Das Problem der drei Würfel in der Vorgeschichte der Stochastik*, Elemente der Mathematik, 42 (1987), S. 69-75; Ivo Schneider, *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933*, Darmstadt 1988, S. 1 und S. 5-8 (kommentierte Quellen). Einen historischen Überblick der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung findet man auch im Anhang des Lehrbuchs B. W. Gnedenko, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*, Berlin 1991.

[10] Siehe dazu den umfassenden Nachdruck Jakob Bernoulli, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 107, Frankfurt/M. 1999, S. 233.