

Regina Bruder
Lisa Hefendehl-Hebeker
Barbara Schmidt-Thieme
Hans-Georg Weigand *Hrsg.*

Handbuch der Mathematik- didaktik

Regina Bruder
Lisa Hefendehl-Hebeker
Barbara Schmidt-Thieme
Hans-Georg Weigand *Hrsg.*

Handbuch der Mathematik- didaktik



Springer Spektrum

Handbuch der Mathematikdidaktik

Regina Bruder • Lisa Hefendehl-Hebeker
Barbara Schmidt-Thieme • Hans-Georg Weigand
(Hrsg.)

Handbuch der Mathematikdidaktik

Herausgeber

Regina Bruder
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt
Darmstadt
Deutschland

Barbara Schmidt-Thieme
Institut für Mathematik und Angewandte
Informatik
Universität Hildesheim
Hildesheim
Deutschland

Lisa Hefendehl-Hebeker
Fakultät für Mathematik
Universität Duisburg – Essen
Essen
Deutschland

Hans-Georg Weigand
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg
Würzburg
Deutschland

Mathematics Subject Classification (2010): MSC 97U10

ISBN 978-3-642-35118-1 ISBN 978-3-642-35119-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-35119-8

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Berlin Heidelberg 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Die Erwartungen an ein Handbuch sind sicherlich sehr unterschiedlich. So mag der eine oder die andere einen aktuellen, detaillierten und vielleicht sogar erschöpfenden Überblick über das im Titel genannte Gebiet erwarten, andere mögen sich ein Buch vorstellen, das im wörtlichen Sinn in eine Hand passt und damit notwendigerweise eine Auswahl treffen und Lücken lassen muss. Das *Handbuch Mathematikdidaktik* ist dem zweiten Aspekt zuzuordnen. Es möchte einen *Einblick* in zentrale Bereiche fachdidaktischer Forschung geben und einen *Überblick* über aktuelle Entwicklungen in der Mathematikdidaktik vermitteln. Insbesondere sollen gegenwärtig diskutierte und damit zukünftig relevante *Fragen* aufgezeigt werden. Das Handbuch ist kein enzyklopädisches Nachschlagewerk, das die Mathematikdidaktik vollständig abdecken sowie aktuelle Diskussionen und Strömungen erschöpfend darstellen wollte.

Jeder Artikel dieses Handbuchs soll eine Einführung in ein Teilgebiet der Mathematikdidaktik mit seinen Problemstellungen und Forschungsansätzen geben, als Grundlage für weitere Forschungen dienen und zur kritischen Auseinandersetzung mit den angebotenen Informationen anregen. Natürlich kann das alles nur aus der individuellen Perspektive der jeweiligen Autorinnen und Autoren geschehen. Alle Beiträge sind auf Deutsch geschrieben und der Fokus der Forschungsarbeiten liegt auch auf dem deutschsprachigen Raum, wobei die internationale Einbindung mitbedacht und einbezogen wird.

Das *Handbuch Mathematikdidaktik* wurde geschrieben

- für im Studium fortgeschrittene Studierende als eine grundlegende und einführende Lektüre für ein Referat, eine Hausarbeit oder eine Abschlussarbeit in der Didaktik der Mathematik;
- für Masterstudierende und angehende Promovierende zu Beginn einer eigenen Forschungsarbeit in der Mathematikdidaktik;
- für Lehrerinnen und Lehrer zum Kennenlernen forschungsbasierter Fragestellungen in der Mathematikdidaktik sowie als Grundlage für theoriegeleitete Reflexionen über eigenen oder fremden Unterricht;
- für Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker, die sich einen Überblick über derzeit aktuelle Forschungsfragen in verschiedenen Teilbereichen ihrer Disziplin verschaffen möchten.

In diesem Handbuch fassen wir die Mathematikdidaktik als Wissenschaft vom Lehren und Lernen von Mathematik auf. Daher orientieren sich Auswahl und Reihenfolge der Themen an verschiedenen Gestaltungskriterien: an der Bedeutung der Mathematik als Bildungsgut in unserer heutigen kulturellen, wirtschaftlichen und politischen Welt (Kap. 1–3); an zentralen Inhalten (Kap. 4–8) und spezifischen Denkprozessen des Faches (Kap. 9–14); an wesentlichen Determinanten der Gestaltung von Mathematikunterricht (Kap. 15–19) und an Forschungsansätzen zu allen diesen Bereichen, welche die Didaktik der Mathematik als Forschungsdisziplin mit einer eigenen Entwicklungsgeschichte, eigenen Zielen, Theorieansätzen und Methoden ausweisen (Kap. 20–23). Jeder Artikel ist in sich geschlossen und für sich rezipierbar, fügt sich aber in das dargestellte Gesamtkonzept ein.

Neben den in den fünf Kapiteln behandelten Forschungsgebieten gibt es weitere Bereiche, deren Bedeutung uns bewusst ist, die jedoch nicht mit einem eigenen Beitrag vertreten, aber – zumindest teilweise – in Artikeln mit bedacht sind. Dazu gehören u. a. Dyskalkulie, Inklusion, Begabtererkennung und Begabungsförderung, Mathematikwettbewerbe, Leistungsbewertung, frühkindliche mathematische Bildung, Kindergarten, fachübergreifender Unterricht, außerschulische Bildungsangebote und Lernorte, Übergänge in der Bildungslaufbahn, Erwachsenenbildung sowie die fachdidaktische Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung.

Bei der referenzierten Literatur musste eine Auswahl getroffen werden, insbesondere zugunsten von Überblicksarbeiten bzw. Arbeiten mit Begrifflichkeiten und Erkenntnissen, die in der wissenschaftlichen Community wahrgenommen und diskutiert wurden und werden. Wir haben versucht, ältere Arbeiten, die nicht der Vergessenheit anheimfallen sollten, zumindest punktuell zu berücksichtigen.

Wir hoffen, dass dieses Buch zum Lesen einlädt, zum Nachdenken anregt und produktive Auseinandersetzungen mit Fragen der Mathematikdidaktik anstößt.

Unser Dank geht an die Verfasserinnen und Verfasser der Artikel, welche sich bereitwillig und kreativ mit den Vorstellungen und Vorgaben der Herausgeber auseinandergesetzt und den langen Entstehungsprozess des Buches geduldig mit getragen haben. Besonderer Dank gilt dem Springer-Verlag, vor allem Herrn Heine, der die Produktion dieses Buches in jeder Hinsicht konstruktiv unterstützend begleitet hat.

April 2014

Regina Bruder
Lisa Hefendehl-Hebeker
Barbara Schmidt-Thieme
Hans-Georg Weigand

Inhaltsverzeichnis

Teil I Mathematik als Bildungsgegenstand

1	Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik	3
	Andreas Loos und Günter M. Ziegler	
2	Schulmathematik und Realität – Verstehen durch Anwenden	19
	Andreas Büchter und Hans-Wolfgang Henn	
3	Bildungstheoretische Grundlagen des Mathematikunterrichts	51
	Michael Neubrand	

Teil II Mathematik als Lehr- und Lerninhalt

4	Arithmetik: Leitidee Zahl	77
	Lisa Hefendehl-Hebeker und Inge Schwank	
5	Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung	117
	Lisa Hefendehl-Hebeker und Sebastian Rezat	
6	Analysis: Leitidee Zuordnung und Veränderung	149
	Rudolf vom Hofe, Joachim Lotz und Alexander Salle	
7	Geometrie: Leitidee Raum und Form	185
	Mathias Hattermann, Gert Kadunz, Sebastian Rezat und Rudolf Sträßer	
8	Stochastik: Leitidee Daten und Zufall	221
	Rolf Biehler und Joachim Engel	

Teil III Mathematik als Denkprozesse

9 Begriffsbildung	255
Hans-Georg Weigand	
10 Problemlösen lernen	279
Frank Heinrich, Regina Bruder und Christina Bauer (geb.Collet)	
11 Algorithmik	303
Jochen Ziegenbalg	
12 Argumentieren und Beweisen	331
Hans Niels Jahnke und Stefan Ufer	
13 Anwendungen und Modellieren	357
Gabriele Kaiser, Werner Blum, Rita Borromeo Ferri und Gilbert Greefrath	
14 Darstellen und Kommunizieren	385
Stefan Jörissen und Barbara Schmidt-Thieme	

Teil IV Mathematik im Unterrichtsprozess

15 Unterrichtsmethoden und Instrukionsstrategien	411
Stefan Ufer, Aiso Heinze und Frank Lipowsky	
16 Aufgaben in Forschung und Praxis	435
Timo Leuders	
17 Medien	461
Barbara Schmidt-Thieme und Hans-Georg Weigand	
18 Diagnostik und Leistungsbeurteilung	491
Elisabeth Moser Opitz und Marcus Nührenbörger	
19 Individualisieren und differenzieren	513
Regina Bruder, Helmut Linneweber-Lammerskitten und Julia Reibold	

Teil V Didaktik der Mathematik als Forschungsdisziplin

20 Zur geschichtlichen Entwicklung der Mathematikdidaktik als wissenschaftlicher Disziplin	539
Horst Struve	

21 Forschungsgegenstände und Forschungsziele	567
Maike Vollstedt, Stefan Ufer, Aiso Heinze und Kristina Reiss	
22 Qualitative mathematikdidaktische Forschung: Das Wechselspiel zwischen Theorieentwicklung und Adaption von Untersuchungsmethoden	591
Christof Schreiber, Marcus Schütte und Götz Krummheuer	
23 Quantitative Forschungsmethoden in der Mathematikdidaktik	613
Stefan Krauss, Georg Bruckmaier, Christine Schmeisser und Martin Brunner	
24 Theorien und Theoriebildung in didaktischer Forschung und Entwicklung	643
Susanne Prediger	
Sachverzeichnis	663

Mitarbeiterverzeichnis

- Dr. Christina Bauer (geb. Collet)** Worms, Deutschland
- Prof. Dr. Rolf Biehler** Paderborn, Deutschland
- Prof. Dr. Werner Blum** Kassel, Deutschland
- Prof. Dr. Rita Borromeo Ferri** Kassel, Deutschland
- Dr. Georg Bruckmaier** Regensburg, Deutschland
- Prof. Dr. Regina Bruder** Darmstadt, Deutschland
- Prof. Dr. Martin Brunner** Berlin, Deutschland
- Prof. Dr. Andreas Büchter** Duisburg-Essen, Deutschland
- Prof. Dr. Joachim Engel** Ludwigsburg, Deutschland
- Prof. Dr. Gilbert Greefrath** Münster/Westfalen, Deutschland
- Dr. Mathias Hattermann** Bielefeld, Deutschland
- Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker** Duisburg-Essen, Essen, Deutschland
- Prof. Dr. Frank Heinrich** Braunschweig, Deutschland
- Prof. Dr. Aiso Heinze** Kiel, Deutschland
- Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn** Dortmund, Deutschland
- Prof. Dr. Rudolf vom Hofe** Bielefeld, Deutschland
- Prof. Dr. Hans Niels Jahnke** Essen, Deutschland
- Dr. Stefan Jörissen** Winterthur, Schweiz
- Prof. Dr. Gert Kadunz** Klagenfurt, Österreich
- Prof. Dr. Gabriele Kaiser** Hamburg, Deutschland
- Prof. Dr. Stefan Krauss** Regensburg, Deutschland

Prof. Dr. Götz Krummheuer Frankfurt am Main, Deutschland

Prof. Dr. Timo Leuders Freiburg, Deutschland

Prof. Dr. Helmut Linneweber-Lammerskitten Solothurn, Schweiz

Prof. Dr. Frank Lipowsky Kassel, Deutschland

Dr. Andreas Loos Berlin, Deutschland

Joachim Lotz Bielefeld, Deutschland

Prof. Dr. Elisabeth Moser Opitz Zürich, Schweiz

Prof. Dr. Michael Neubrand Oldenburg, Deutschland

Prof. Dr. Marcus Nührenböcker Dortmund, Deutschland

Prof. Dr. Susanne Prediger Dortmund, Deutschland

Julia Reibold Darmstadt, Deutschland

Prof. Dr. Kristina Reiss München, Deutschland

Prof. Dr. Sebastian Rezat Paderborn, Deutschland

Dr. Alexander Salle Bielefeld, Deutschland

Christine Schmeisser Regensburg, Deutschland

Prof. Dr. Barbara Schmidt-Thieme Hildesheim, Deutschland

Prof. Dr. Christof Schreiber Gießen, Deutschland

Prof. Dr. Marcus Schütte Dresden, Deutschland

Prof. Dr. Inge Schwank Köln, Deutschland

Prof. Dr. Rudolf Sträßer Gießen, Deutschland

Prof. Dr. Horst Struve Köln, Deutschland

Prof. Dr. Stefan Ufer München, Deutschland

Prof. Dr. Maike Vollstedt Bremen, Deutschland

Prof. Dr. Hans-Georg Weigand Würzburg, Deutschland

Prof. Dr. Jochen Ziegenbalg Karlsruhe, Deutschland

Prof. Dr. Günter M. Ziegler Berlin, Deutschland

Mathematik als Bildungsgegenstand

In allen Kulturen, in denen Menschen begannen, die Welt wissenschaftlich zu erschließen, spielte und spielt die Mathematik eine entscheidende Rolle. Sie verfügt über Erkenntnis leitende Prinzipien – wie etwa Maß und Zahl –, die es ermöglichen, Gedanken zu präzisieren und zu verlässlichem Wissen zu gelangen. Mit ihren besonderen Verfahren der Wissensbildung ist die Mathematik in unserer Gesellschaft zu einer Schlüsseltechnologie geworden. Nicht nur die fortschreitende naturwissenschaftlich-technische Durchdringung unserer Lebenswelt bedient sich maßgeblich mathematischer Methoden, mathematische Modelle werden zunehmend auch zur Beschreibung und Gestaltung von Abläufen im wirtschaftlichen und sozialen Bereich verwendet. Die Mathematik verfügt nicht nur über grundlegende Denkweisen, sie gewinnt auch in Bezug auf ihre Ergebnisse und Einsatzmöglichkeiten wachsende Bedeutung. Dabei vollzieht sich diese Entwicklung allerdings auf eine versteckte, von der Öffentlichkeit weitgehend unbemerkte Weise. Dies führt dazu, dass die gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik unterschätzt und die kritische Reflexion ihrer Bedeutung vernachlässigt wird.

Das Schulfach Mathematik hat in mehrfacher Hinsicht einen Bildungsauftrag zu erfüllen. So sind zunächst das Wissen des Einzelnen über die Welt, seine Sicht auf die Welt und seine potentiellen Fähigkeiten – wie etwa Argumentieren, Begründen und Probleme lösen – mathematikspezifisch auszubilden und zu entwickeln. Weiter benötigt die Gesellschaft intellektuell aufgeschlossene Bürgerinnen und Bürger, die sich ein sachgerechtes und kritisches Urteil darüber bilden können, welche Rolle die Mathematik in unserer Welt spielt und auf welche Weise dies erfolgt. Schließlich ist Mathematik für die Sicherung eines ausreichenden Bestandes an hoch qualifizierten Fachkräften für die wirtschaftliche und kulturelle Wettbewerbsfähigkeit eines modernen Industrielandes unabdingbar. Mathematische Bildung ist folglich auf die Entwicklung des Einzelnen ausgerichtet und muss dabei sowohl Exzellenz hervorbringen und fördern als auch einen soliden Wissensstand in der Breite erzielen. In den folgenden drei Beiträgen wird Mathematik als Bildungsgegenstand aus drei verschiedenen Blickwinkeln betrachtet.

Andreas Loos und *Günter M. Ziegler* zeigen die gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik auf. Die Autoren verfolgen zunächst die grundlegenden Fragen, was überhaupt unter Mathematik verstanden werden kann und inwieweit ihren Objekten eine eigene Realität zukommt. Einerseits ist Mathematik heute in den meisten Wissenschaften und in der Wirtschaft ein wichtiges Hilfsmittel und Werkzeug. Andererseits ist Mathematik ein eigenständiges Forschungsgebiet, bei dem der Anwendungsbezug zunächst nicht im Vordergrund steht. Die Erforschung von Zahlen, Mengen und Strukturen verleiht dem Fach sogar aufgrund seiner Abstraktheit und Zeitlosigkeit eine Unabhängigkeit von der „realen Welt“. Mathematik ist somit eine Wissenskultur und eine eigenständige Wissenschaft jenseits von Anwendungsbezügen und zugleich ein Werkzeug in permanenter Weiterentwicklung in den unterschiedlichsten technischen, ökonomischen und gesellschaftlichen Bereichen.

Dieses Wechselspiel zwischen Theoriebildung und Anwendung ist für den Mathematikunterricht in mehrfacher Hinsicht relevant. Epistemisch betrachtet ist es eine Triebfeder der fachlichen Entwicklung und kann curricular als organisierendes Prinzip helfen, ein ausgewogenes Bild der Mathematik in ihrer historischen Genese wie in ihrer aktuellen gesellschaftlichen Bedeutung zu erzeugen. Aus lernpsychologischer Sicht ist die Beziehung zwischen Mathematik und Realität grundlegend für verstehendes fachliches Lernen, wenn dieses an natürlichen Prozessen der Wissensbildung orientiert und durch Anschauung fundiert sein soll. Diesem Fragenkreis widmet sich der Beitrag von *Andreas Büchter* und *Wolfgang Henn*. Vor dem Hintergrund bildungspolitischer Entwicklungen analysieren die Autoren einerseits das Verstehen von Mathematik durch realitätsbezogene Anwendungen und andererseits das Erkennen von Mathematik in der uns umgebenden Welt als eine Grundlage für mathematische Lehr-Lernprozesse in der Schule. Dabei findet der Prozess des mathematischen Modellierens besondere Beachtung.

Der Beitrag von *Michael Neubrand* setzt bei dem allgemeinen Diskurs über Bildung an und erörtert die Frage, wie generelle Orientierungen von Bildung auf die besondere Domäne Mathematik zu beziehen sind, wie also der Mathematikunterricht dazu beitragen kann, dass sich unter den jeweiligen gesellschaftlichen und sozialen Bedingungen universelle Bestimmungen des Selbst- und Weltverständnisses wie Vernunft, Rationalität, Humanität und Sittlichkeit ausbilden und mit der Entfaltung von Individualität verschränken können. Die diesbezüglichen Antworten der Pädagogik haben im Laufe der Geschichte deutliche Akzentverschiebungen erfahren. Während Humboldt vorrangig den konstitutiven Beitrag der Mathematik zu einer umfassenden wissenschaftlichen Kultur betonte, setzen zeitgenössische Bildungstheoretiker angesichts der schneller werdenden Veränderung der Lebensbedingungen auf Schlüsselkategorien wie „Kultivierung der Lernfähigkeit“ (Tenorth) und „Anschlussfähigkeit des erworbenen Wissens“ (Weinert). In Bezug auf die pragmatischen Versuche einer curricularen Umsetzung durch die Bildungsstandards für das Fach Mathematik sieht der Autor noch Forschungsbedarf und erkennt zugleich in den drei Grunderfahrungen nach H. Winter eine von breitem Konsens getragene Richtungsangabe.

Andreas Loos und Günter M. Ziegler

Die Beziehung zwischen Mathematik und Gesellschaft geht weit über die Anwendungen der Mathematik als Hilfsmittel im Alltag oder als Werkzeug zur Beschreibung, Prognose und Optimierung in Naturwissenschaften, Technik und Wirtschaft hinaus. Mathematische Bildung ist essentiell für die Ausbildung mündiger Bürger, fähiger Fachkräfte und eine Grundlage von Studierfähigkeit über alle Fächer hinweg. Obendrein ist die Entwicklung der Mathematik eine über Jahrtausende gewachsene Kulturleistung, die von Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern geleistet wird, die ihrerseits in der Gesellschaft verwurzelt sind. Weil diese Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler die Entwicklung und Ausgestaltung der Mathematik prägen, wird in manchen philosophischen Beiträgen die Mathematik sogar als „soziokulturelles Konstrukt“ dargestellt.

1.1 Grundlegende Fragen

Was ist Mathematik und wie steht sie im gesellschaftlichen Kontext? Traditionell wird das Fach als ein Zwitterwesen präsentiert. Einerseits gibt es die *reine Mathematik*, weitgehend losgelöst von der Gesellschaft; oft wird diesem Bereich der Mathematik eine eigene Realität zugeschrieben, unabhängig vom menschlichen Erfindungsgeist. Andererseits ist die Mathe-

Wir danken Stephanie Schiemann, Robert Wöstenfeld (Netzwerkbüro Schule-Hochschule der DMV) und Thomas Vogt (Medienbüro Mathematik der DMV) für wertvolle Hinweise.

A. Loos (✉)
Berlin, Deutschland
E-Mail: andreas.loos@fu-berlin.de

G. M. Ziegler
Berlin, Deutschland
E-Mail: ziegler@math.fu-berlin.de