Zinsrechnen

Das Rechnen mit Zinsen hat im Wirtschaftsleben große Bedeutung. Banken vergüten Ihnen Zinsen, wenn Sie Geld anlegen oder berechnen Zinsen, wenn Sie einen Kredit beanspruchen. Sind Sie Kunde eines Unternehmens und zahlen zu spät, dann sind Verzugszinsen fällig. Sie sind deshalb gut beraten, wenn Sie die Ihnen berechneten Zinsen selbst nachrechnen können.

Die **Zinsrechnung** ist eine Weiterentwicklung der Prozentrechnung (Kapitel Prozentrechnen, Seite 21). Als neuer Faktor kommt die Zeit hinzu. Sie kann in Jahren (i), Monaten (m) oder in Tagen (t) angegeben werden.

Prozentrechnung	Zinsrechnung
Grundwert	**Kapital (K)**
Prozentsatz	**Zinssatz (p)**
Prozentwert	**Zinsen (Z)**
	Zeit (i, m, t)

Berechnen der Zinsen

Zinsen sind der Preis für die Überlassung von Kapital für eine bestimmte Zeit. Die Höhe der Zinsen ist von der Summe des überlassenen Kapitals, dem Zinssatz (Zinsfuß) und der Laufzeit abhängig.

Der Zinssatz bezieht sich gewöhnlich auf ein Jahr. Die Berechnung der Jahres-, Monats- und Tageszinsen erfolgt mit Formeln.

Jahreszinsen

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Kapital} \times \text{Zinssatz} \times \text{Jahre}}{100} \qquad Z = \frac{K \times p \times i}{100}$$

Beispiel

Darlehen 50.000 €, Zinssatz 7 %, Dauer 3 Jahre.

$$Z = \frac{50.000 \times 7 \times 3}{100} = 10.500 \text{ €}$$

Monatszinsen

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Kapital} \times \text{Zinssatz} \times \text{Monate}}{100 \times 12} \qquad Z = \frac{K \times p \times m}{100 \times 12}$$

Beispiel

Ein Bankkunde legt 35.000 € für die Zeit vom 10.05. bis zum 10.08. als Termingeld zu 5 % an. Wie hoch ist die Zinsgutschrift nach 3 Monaten?

$$Z = \frac{35.000 \times 5 \times 3}{100 \times 12} = 437,50 \text{ €}$$

Tageszinsen

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Kapital x Zinssatz x Tage}}{100 \text{ x } 360} \qquad Z = \frac{K \text{ x } p \text{ x } t}{100 \text{ x } 360}$$

Beispiel

Beispiel Darlehen 50.000 €, Zinssatz 7 %, 252 Tage

$$Z = \frac{50.000 \text{ x } 7 \text{ x } 252}{100 \text{ x } 360} = 2.450 \text{ €}$$

Berechnung der Tage in der Zinsrechnung

Bei der **Tageberechnung** in der Zinsrechnung in Deutschland ist zu unterscheiden:

- **Privatpersonen** und Behörden rechnen das Jahr mit 365 Tagen und die Monate nach der genauen Tageszahl.
- **Kaufleute** rechnen das Jahr mit 360 Tagen und jeden Monat mit 30 Tagen. Der 31. eines Monats wird nicht gerechnet, aber auch der Februar hat als Zinsmonat 30 Tage.

Berechnung der Zinstage im Ausland

Die Tageberechnung in der Zinsrechnung wird in einigen Ländern wie in Deutschland praktiziert, andere Länder kennen andere Berechnungsarten.

- Die **deutsche** Berechnungsart mit 360 Tagen im Jahr und 30 Tagen im Monat wird in der Schweiz, Dänemark, Schweden, Norwegen und Russland angewendet.
- Die **französische** Berechnungsart nimmt das Jahr mit 360 Tagen an und rechnet jeden Monat genau. Frankreich, Belgien, Niederlande, Italien, Spanien und Österreich gehen so vor.

$$\text{Tageszinsen} = \frac{\text{Kapital x Zinssatz x Tage (genau)}}{100 \text{ x } 360}$$

- Die **englische** Berechnungsart setzt das Jahr mit 365 Tagen und jeden Monat genau an. Großbritannien und die USA wenden diese Berechnungsart an.

Eurozinsmethode

Seit 1994 wenden die Deutsche Bundesbank und die Geschäftsbanken die Eurozinsmethode an, die der französischen Zinsberechnung entspricht.

- Das Jahr wird mit 360 Tagen angesetzt, die Monate werden taggenau gerechnet.
- Januar, März, Mai, Juli, August, Oktober und Dezember werden mit 31 Zinstagen gerechnet.
- April, Juni, September und November werden mit 30 Tagen angesetzt.
- Der Februar hat 28 Zinstage, im Schaltjahr 29.

- Wenn der Fälligkeitstag auf einen Samstag, Sonntag oder Feiertag fällt, dann werden die Zinsen bis zum nächsten Werktag gerechnet.

Auch bei der Eurozinsmethode wird der 1. Tag des Zeitraumes nicht mitgezählt – aber der letzte Kalendertag ist ein voller Zinstag.

> Berechnung der Zinstage:
> – Die Tage im ersten Zinsmonat können als Differenz ermittelt werden.
> – Die Tage der folgenden ganzen Zinsmonate können nach dem Kalender berechnet werden.
> – Die Tage des letzten Zinsmonats werden genau festgestellt.

Beispiele

11.01. bis 31.01. = 20 Tage
02.02. bis 15.03. = 41 Tage
15.03. bis 10.04. = 26 Tage
30.04. bis 31.05. = 31 Tage
31.05. bis 30.08. = 91 Tage

Berechnen von Kapital, Zinssatz und Zeit

Die allgemeine Zinsformel können Sie umformen und Kapital, Zinssatz und Zeit berechnen.

Allgemeine Zinsformel

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Kapital} \times \text{Zinssatz} \times \text{Tage}}{100 \times 360} \qquad Z = \frac{K \times p \times t}{100 \times 360}$$

Auflösung der allgemeinen Zinsformel nach dem Kapital

$$\text{Kapital} = \frac{\text{Zinsen} \times 100 \times 360}{\text{Zinssatz} \times \text{Tage}} \qquad K = \frac{Z \times 100 \times 360}{p \times t}$$

Beispiel

Welches Kapital erbringt bei einer Verzinsung von 6 % nach 30 Tagen 1.500 €?

$$K = \frac{1.500 \times 100 \times 360}{6 \times 30} = 300.000 \text{ €}$$

Auflösung nach dem Zinssatz

$$\text{Zinssatz} = \frac{\text{Zinsen} \times 100 \times 360}{\text{Kapital} \times \text{Tage}} \qquad p = \frac{Z \times 100 \times 360}{K \times t}$$

Beispiel

Ein Kapital über 100.000 € brachte nach 90 Tagen 1.250 € Zinsen. Zu welchem Zinssatz war es angelegt?

$$p = \frac{1.250 \times 100 \times 360}{100.000 \times 90} = 5\ \%$$

Auflösung nach den Tagen

$$\text{Tage} = \frac{\text{Zinsen} \times 100 \times 360}{\text{Kapital} \times \text{Zinssatz}} \qquad t = \frac{Z \times 100 \times 360}{K \times p}$$

Beispiel

Ein Bankkunde hat bei seiner Hausbank ein Darlehen über 120.000 € in Anspruch genommen. Die Bank berechnet 5.400 € Zinsen bei einem Zinssatz von 11 %. Vor wie viel Tagen wurde das Darlehen aufgenommen?

$$t = \frac{5.400 \times 100 \times 360}{120.000 \times 11} = 147{,}27 = 147 \text{ Tage}$$

Kaufmännische Zinsformel

Die Kaufmännische Zinsformel wird aus der allgemeinen Zinsformel abgeleitet.

Allgemeine Zinsformel

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Kapital} \times \text{Zinssatz} \times \text{Tage}}{100 \times 360} \qquad Z = \frac{K \times p \times t}{100 \times 360}$$

Die allgemeine Zinsformel kann auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$Z = \frac{K \times t}{100} \times \frac{p}{360} \qquad Z = \frac{K \times t}{100} : \frac{360}{p}$$

Das Produkt $\frac{K \times t}{100}$ kann auch als $\frac{K}{100} \times t$ geschrieben werden und ist die **Zinszahl.**

Der Quotient $\frac{360}{p}$ heißt **Zinsteiler** oder **Zinsdivisor.**

$$Z = \frac{\frac{K \times t}{100}}{\frac{360}{p}} = \frac{\text{Zinszahl}}{\text{Zinsdivisor}}$$

Die allgemeine Zinsformel wird zur kaufmännischen Zinsformel – im Zähler des Bruches steht die Zinszahl und im Nenner der Zinsdivisor.

Kaufmännische Zinsformel

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Zinszahl}}{\text{Zinsdivisor}}$$

Beispiel

Kapital 70.000 €, 8 % Zinssatz, 310 Tage.

$$Z = \frac{\text{Zinszahl}}{\text{Zinsdivisor}} = \frac{700 \text{ x } 310}{\frac{360}{8}} = 4.822{,}22\ €$$

Summarische Zinsrechnung

Die Abrechnung mehrerer unterschiedlicher Beträge zum gleichen Zinssatz ist Gegenstand der summarischen Zinsrechnung. Die Zinszahlen der einzelnen Beträge werden addiert und durch den gemeinsamen Zinsdivisor geteilt.

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Summe der Zinszahlen}}{\text{Zinsdivisor}}$$

Beispiel

Ein Industrieunternehmen hat gegen einen Kunden drei Einzelforderungen: 60.000 €, fällig am 19.08., 8.000 €, fällig am 03.10., 25.000 €, fällig am 10.11. Wie hoch ist die Gesamtforderung am 19.11. einschließlich 9 % Verzugszinsen?

Wie müssen Sie vorgehen?

			19.11.	
Beträge	Verfall	Tage	Zinszahlen	
60.000,00 €	19.08	92	55.200	
8.000,00 €	03.10	47	3.760	
25.000,00 €	10.11	9	2.250	
93.000,00 €			61.210 : 40 = 1.530,25	
1.530,25 €	9 % Verzugszinsen			
94.530,25 €	Gesamtforderung			

1 Beträge und Verfallzeiten eintragen.

2 Zinstage ermitteln nach der Eurozinsmethode.

3 Zinszahlen berechnen (1 % des Kapitals x Tage).

4 Die Summe der Zinszahlen ist durch den Zinsdivisor zu teilen (360/p). Bei 9 % ergibt sich der Zinsdivisor aus 360/9 = 40.

$$\text{Verzugszinsen} = \frac{61.210}{40} = 1.530{,}25$$

5 Die Gesamtforderung ergibt sich aus der Addition der Einzelforderungen plus Verzugszinsen.

Zinseszinsrechnen

Bei der Zinseszinsrechnung werden das Kapital und die gutgeschriebenen Zinsen verzinst.

Beispiel

Ein Kapital von 10.000 € wird für drei Jahre zu 6 % verzinst, wobei die gutgeschriebenen Zinsen ebenfalls verzinst werden.

	Jahresanfang 1. Jahr	10.000,00 €
+	Zinsen 6 %	600,00 €
	Jahresanfang 2. Jahr	10.600,00 €
+	Zinsen 6 %	636,00 €
	Jahresanfang 2. Jahr	11.236,00 €
+	Zinsen 6 %	674,16 €
	Kapital Ende 3. Jahr	11.910,16 €

Die Berechnung des Endwerts eines Kapitals wird als **Aufzinsung** bezeichnet. Der **Aufzinsungsfaktor** für einen bestimmten Zinssatz p wird als $q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ dargestellt.

K_0 ist das Anfangskapital, n die Laufzeit in Jahren, K_n ist das Endkapital.

Zinseszinsformel

$$K_n = K_0 \times \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Sie können das letzte Beispiel auch mit der Zinseszinsformel berechnen.

$$K = 10.000 \left(1 + \frac{6}{100}\right)^3$$

$$K = 10.000 \times 1{,}06^3 = 10.000 \times 1{,}191016 = 11.910{,}16\ €$$

Das Gegenstück zur Aufzinsung ist die **Abzinsung.** In diesem Fall ist der Kapitalwert Kn nach n Jahren bekannt. Man will aber den entsprechenden abgezinsten Wert, den **Barwert**, kennen.

Die Berechnung des Barwerts, die man als Diskontierung bezeichnet, zinst K_n um die betreffenden Jahre ab. Der Abzinsungsfaktor ist der Kehrwert des Aufzinsungsfaktors.

Beispiel

Wie groß ist der Barwert eines Kapitals, das in 4 Jahren bei einem Zinsfuß von 6 % auf 17.000 € wächst?

$$K_0 = 17.000 \times \frac{1}{(1 + 0{,}06)^4}$$

$$K = 17.000 \times \frac{1}{1{,}262476} = 13.465{,}59 \text{ €}$$

Sie brauchen die Aufzinsungs- oder Zinseszinsfaktoren nicht selbst berechnen, Sie können diese direkt in Zinseszinstabellen ablesen. Eine solche Zinseszinstabelle finden Sie zum Beispiel im Buch „Kaufmännisches Rechnen von A–Z, Formeln, Rechenbeispiele und Tipps für die Praxis“ aus dem Haufe Verlag.

Mehr Transparenz durch Effektivzinssatzangabe

Banken, Sparkassen und Versicherungen sind durch die **Preisangabenverordnung** zur Angabe des Effektivzinses verpflichtet – tun es also nicht aus reiner Kundenfreundlichkeit. Dem Verbraucher wird so die Möglichkeit gegeben, Preisvergleiche bei Kreditangeboten oder Wertpapieranlagen durchzuführen. Der Effektivzins hat zu mehr Transparenz geführt.

Effektivzins

Für Sie ist nicht der Nominalzinssatz, sondern der Effektivzinssatz entscheidend, denn nur er sagt Ihnen, wie viel ein Kredit tatsächlich kostet oder eine Kapitalanlage erwirtschaftet. Der Effektivzinssatz berücksichtigt alle anfallenden Kosten und Gebühren und ist damit genauer als der Nominalzinssatz. Seit 1985 wird der Ausweis des effektiven Jahreszinssatzes bei Kreditangeboten vom Gesetzgeber verlangt.

Kreditangebote

Der Effektivzinssatz erfasst unter Zugrundelegung der Laufzeit des Kredits:

- ausgezahlte Summe
- nominaler Zinssatz
- Vermittlungskosten
- anfallende Kosten, z. B. Bearbeitungsgebühr
- Tilgungsleistungen

Der Effektivzinssatz berücksichtigt insbesondere das **Disagio**, die Differenz zwischen vereinbarter Kreditsumme und tatsächlich ausgezahltem Betrag. Der Effektivzinssatz ist damit in der Regel höher als der Nominalzinssatz.

Beispiel: Effektivzinssatz von Kreditangeboten

Eine Bank macht einem Kunden zwei Kreditangebote.

Darlehen 200.000 €	
Kreditangebot A:	**Kreditangebot B:**
Nominalzins 9 %	Nominalzins 8,5 %
Auszahlungsbetrag 98 %	Auszahlungsbetrag 97,5 %
	Bearbeitungsgebühr 0,25 %
Laufzeit 4 Jahre	

Welches Angebot hat den niedrigeren Effektivzinssatz?

Kreditangebot A:

Das Disagio beträgt 2 % von 200.000 € = 4.000 €.
Zins und anteiliges Disagio für 1 Jahr

Zins = 9 % von 200.000€	18.000 €
Disagio = 4.000 € : 4	1.000 €
zusammen	19.000 €
Auszahlungsbetrag 98 % =	196.000 €

$$p = \frac{Z \times 100 \times 360}{K \times t} = \frac{19.000 \times 100 \times 360}{196.000 \times 360} = 9{,}69\ \%$$

Kreditangebot B:

Das Disagio beträgt 2,5 % von 200.000 € = 5.000 €,
die Bearbeitungsgebühr 0,25 % = 500 €.
Bezugsbasis 1 Jahr

Zins = 8,5 % von 200.000 €	17.000 €
Disagio = 5.000 € : 4	1.250 €
Bearbeitungsgebühr 500 : 4	125 €
zusammen	18.375 €
Auszahlungsbetrag 97,5 % =	195.000 €

$$p = \frac{Z \times 100 \times 360}{K \times t} = \frac{18.375 \times 100 \times 360}{195.000 \times 360} = 9{,}42\ \%$$

Fazit: Angebot B ist günstiger.