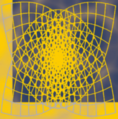
Forst · Hoffmann

Funktionentheorie erkunden mit Maple®



2., überarbeitete
und aktualisierte Auflage

Springer Spektrum

Springer-Lehrbuch

Wilhelm Forst · Dieter Hoffmann

Funktionentheorie erkunden mit Maple®

Zweite, überarbeitete und aktualisierte Auflage

Springer Spektrum

Prof. Dr. Wilhelm Forst
Universität Ulm
Deutschland

Prof. Dr. Dieter Hoffmann
Universität Konstanz
Deutschland

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-642-29411-2
ISBN 978-3-642-29412-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-29412-9

Mathematics Subject Classification (2010): 97-01, 30-02, 32-01

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.
Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Für unsere Enkelkinder

Matías, *Louise*, *Luca*, *Nicolas*, *Gabriel*, *Étienne und Léon*

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur ersten Auflage XI

Vorwort zur zweiten Auflage XVIII

1 Die komplexen Zahlen 1

1.1 Historisches 1

1.2 Definition und Modelle komplexer Zahlen 3

Arithmetische Einführung der komplexen Zahlen 4

Die komplexen Zahlen als Unterring der 2×2-Matrizen 5

Die komplexen Zahlen als Restklassenring 6

Geometrische Einführung der komplexen Zahlen 6

1.3 Elementare Operationen und Regeln 6

1.4 Argument, geometrische Veranschaulichung 8

1.5 Wurzeln 11

1.6 Riemannsche Zahlenkugel und stereographische Projektion... 12

Maple Worksheets zu Kapitel 1 15

2 Topologische Grundlagen 39

2.1 Konvergenz von Folgen 39

2.2 Topologische Begriffe für Mengen und Punkte 41

2.3 Stetigkeit und Grenzwert 43

Grundeigenschaften stetiger Abbildungen 44

Grenzwerte 44

Satz von Weierstraß 45

2.4 Reihen und Potenzreihen 46

Potenzreihen 49

Maple Worksheets zu Kapitel 2 51

3 Komplexe Differenzierbarkeit 71
3.1 Definition und Grundregeln 71
3.2 Differentiation von Potenzreihen 73
3.3 Zusammenhang zwischen komplexer und reeller Differenzierbarkeit 74
Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, Holomorphie 75
Konforme Abbildungen 76
3.4 Exponentialfunktion und Logarithmus 77
Allgemeine Potenzen 80
cosh, sinh, tanh, tan und Umkehrfunktionen 81

Maple Worksheets zu Kapitel 3 83

4 Kurven, Kurvenintegrale und Hauptsatz 101
4.1 Kurven 101
4.2 Kurvenintegrale 103
4.3 Hauptsatz 105
Hauptsatz (Cauchyscher Integralsatz, 1. Fassung) 106
Fundamentalsatz der Algebra 106
Hauptsatz (Cauchyscher Integralsatz, 2. Fassung) 114

Maple Worksheets zu Kapitel 4 115

5 Cauchysche Integralformel und Folgerungen 129
5.1 Integralformel 129
5.2 Potenzreihenentwicklung 131
5.3 Holomorphiekriterien 133
Satz von Morera 133
Identitätssatz 134
5.4 Integralformel für die Ableitungen 136
Abschätzung für Ableitungen und Koeffizienten 136
Satz von Liouville 137
Satz von Weierstraß II 138
Satz über Gebietstreue 139
Prinzip vom Maximum 140
Differentiation unterm Integral 141

Maple Worksheets zu Kapitel 5 143

6 Der globale Hauptsatz 163
6.1 Umlaufzahl, Zyklen 163
6.2 Der Hauptsatz für nullhomologe Zyklen 168

Maple Worksheets zu Kapitel 6 171

7 Laurent-Reihen, isolierte Singularitäten, Residuensatz 181
7.1 Laurent-Reihen 181
7.2 Isolierte Singularitäten 185
Satz von Casorati-Weierstraß 188
Berechnungsmethoden für Residuen 188
7.3 Residuensatz 190
Berechnung von Integralen mit Hilfe von Residuen 190
7.4 Argumentprinzip und Anwendungen 197
Logarithmisches Residuum 197
Satz von Rouché 199
Routh-Kriterium 200

Maple Worksheets zu Kapitel 7 209

8 Konforme Abbildungen und ihre Anwendungen 235
8.1 Möbius-Transformationen 235
8.2 Joukowski-Transformation 245
8.3 Harmonische Funktionen und das Dirichlet-Problem 247
Komplexe Potentiale 249
Mittelwerteigenschaft 251
Prinzip vom Maximum, Poissonsche Integralformel 252
Verpflanzungsprinzip 254

Maple Worksheets zu Kapitel 8 257

9 Die Γ-Funktion 281
9.1 Zur Γ-Funktion im Reellen 281
9.2 Die Gammafunktion im Komplexen 286
9.3 Stirling-Formel 290

Maple Worksheets zu Kapitel 9 293

10 Anhang zu Maple 299

10.1 Ein erster Einstieg in Maple 299

10.2 Der Befehl *interface* 306

10.3 Die Initialisierungsdatei 307

10.4 Der Befehl *transform* 308

10.5 Eigene Pakete definieren 311

Symbolverzeichnis 315

Namen- und Sachverzeichnis 317

Index zu Maple 323

Literaturverzeichnis 327

Vorwort zur ersten Auflage

Es gibt viele gute und auch sehr gute Bücher zur Funktionentheorie.

Das vorliegende Buch versucht keineswegs, allein die Zahl solcher Bücher zu erhöhen; das Hauptziel wird aus dem Untertitel deutlich: *„mit Maple erkunden“*. Die Kombination einer soliden und ausgefeilten Einführung in die Funktionentheorie und zugehöriger Arbeitsblätter mit *Maple vom Feinsten* macht den besonderen Reiz dieses Buches aus. Maple wird so mit den Inhalten der Funktionentheorie verknüpft, daß der *Schwerpunkt* auf *Erklärung* und *Visualisierung* liegt, nicht als bloßes Anhängsel.

Wir wollen Lernende, Lehrende und Praktiker gewinnen, ein solches Computeralgebrasystem im ‚Alltag‘ intensiv einzusetzen. Anwender können stärker für Themen wie Funktionentheorie gewonnen werden, wenn Verbindungen zur praktischen Rechnung erkennbar sind. Das dauernde Wechselspiel zwischen Text und ‚Maple-Worksheets‘, kurz MWSs, führt zu einer wesentlich besseren Durchdringung des Stoffes.

Wir hoffen, daß etwas von unserer Begeisterung auf die Leser überspringt, und Lehrende neue Impulse für die Gestaltung ihrer Vorlesungen mitnehmen.

Es wird eine allgemeine Einführung in die Funktionentheorie gegeben für Mathematiker, Physiker und Ingenieure — und allgemeiner für Studierende mit Mathematik als Nebenfach. Dabei haben wir durchaus auch *Bachelor-Studiengänge* im Auge.

T. Needham schreibt in [Nee], daß Mathematik oft so dargeboten werde wie Musik, bei der man *nur* Partituren liest, also sie weder spielt noch hört. Er betont die Kraft der *Visualisierung* gerade bei der Funktionentheorie. Bei uns wird zusätzlich gezeigt, wie man solche Dinge relativ leicht selbst machen kann.

In der Funktionentheorie ist dies besonders geboten: Der Verlauf einer reellwertigen Funktion einer reellen Variablen kann gut durch den Graphen in der (x, y)-Ebene ($\mathbb{R}^2$) veranschaulicht werden. Bei einer komplexwertigen Funktion f einer komplexen Variablen z ist dies nicht ohne weiteres möglich, da dies auf den $\mathbb{R}^4$ führen würde. Man behilft sich meist damit, daß man *zwei* Ebenen — eine z-Ebene und eine w-Ebene — heranzieht. In der ersten markiert man Punkte z, in der zweiten die zugeordneten Punkte $w = f(z)$. Insbesondere durch die Bilder charakteristischer ‚Kurven‘, die z durchläuft, bekommt man so eine gute Vorstellung von f.

Unser Buch kann gewinnbringend für *alle* Studiengänge nach einer zweisemestrigen Einführung in die Analysis, also ab dem 3. Studiensemester herangezogen werden. Dem **Lernenden** werden mathematisch ‚saubere‘ und leistungsfähige Methoden an die Hand gegeben, was die praktische Arbeit wesentlich erleichtert. Der **Lehrende** findet ein solides und ansprechendes Buch, das er zur Orientierung oder als Begleittext ohne Vorbehalte empfehlen kann.

Gleich zu Beginn sei ausdrücklich gesagt: Vokabeln wie etwa ‚Leser‘ sollten stets als ‚Leser*in* und Leser‘ verstanden werden. Sprachliche Spielereien wie ‚LeserInnen‘ oder ‚der (die) Leser(in)‘ und Ähnliches finden wir unschön und wenig sinnvoll. Auch wenn wir das nicht fortwährend betonen: *Die weiblichen Leser des Buches sind uns herzlich willkommen.*

Das vorliegende Buch kann den *Lernenden* von Beginn an begleiten und Grundlage oder Ergänzung zu der Einführung in die Funktionentheorie im Grundstudium bieten. Es vermittelt eine gute Basis für die Beschäftigung mit weiterführenden oder allgemeineren Themen und vor allem für die vielfältigen Anwendungen.

Das Buch kann dem *Lehrenden*, der die zu präsentierenden Themen und Methoden stärker heutigen computerunterstützten Möglichkeiten anpassen will, eine gute Hilfe und zuverlässiger Wegweiser sein.

Wir haben uns immer wieder bemüht, dem Leser die Ideen nahezubringen, ihn zum Mitmachen zu animieren. Dies hat die Darstellung stark geprägt.

Zu allen Themen finden sich im Text zahlreiche, meist vollständig durchgerechnete und mit Bedacht ausgewählte **Beispiele**. Die große Fülle der ausgeführten Beispiele zeigt ausgiebig das *„Wie“*, der sonstige Text erläutert das *„Warum“*. Die MWSs zeigen dann, wie man die Dinge mit einem Computeralgebrasystem umsetzen kann. Sie geben vielfältige Anregungen zum selbständigen Experimentieren.

Instruktive und sorgfältig ausgewählte **Abbildungen** tragen — auch schon im Textteil — zur Veranschaulichung des Stoffes bei und erleichtern so das Verständnis. Manche der Graphiken sind dabei von ästhetischem Reiz.

Auf ein detailliertes Durchgehen der Gliederung des Buches verzichten wir. Das ausführlich gehaltene Inhaltsverzeichnis gibt vorweg genügend Übersicht. Ein erstes Durchblättern dürfte zur Lektüre des gesamten Buches verführen. Es seien nur einige Besonderheiten des Textes erwähnt:

- Anders als in vielen sonstigen Lehrbüchern für das dritte Studiensemester wird der Stoff an dem orientiert, was in einem guten halben Semester — meist neben einer Einführung in die Gewöhnlichen Differentialgleichungen — machbar ist.
- Exemplarisch werden Anwendungsbeispiele aus dem Ingenieurbereich unter verschiedenen Aspekten angesprochen.
- Der Satz von Rouché wird durch ausführliche Überlegungen zum Routh-Kriterium ergänzt.

- MÖBIUS-Transformationen werden nicht als Selbstzweck behandelt, sondern mit dem Ziel, auch ihre Einsatzmöglichkeit bei der Lösung des DIRICHLET-Problems aufzuzeigen.
- Als weitere *konforme Abbildung* gehen wir kurz auf die JOUKOWSKI-Transformation ein.

Zur **inhaltlichen und didaktischen Konzeption** ist folgendes zu sagen:

Es soll den Lernenden ab dem dritten Semester begleiten und wird sicher auch später noch zuverlässiger Ratgeber und Nachschlagemöglichkeit sein. Es ist durchaus auch zum Selbststudium geeignet; denn es ermuntert fortwährend zu aktivem Mitdenken und eigenem Tun. Dabei ist die mathematische Darstellung durch die Computerrealisierung begleitet, dennoch sauber von ihr getrennt.

Die Darstellung ist weit entfernt davon, eine bloße Sammlung von Kochrezepten zu sein. Gerade die mathematisch strenge Herleitung zentraler Ideen und durchgehend präzise Formulierung und Darstellung fördern entscheidend Verständnis und Durchblick und geben so erst die gewünschte Sicherheit bei der Anwendung. An wenigen Stellen, wo ein vollständiger strenger Beweis uns nicht ratsam schien, wird ein Literaturverweis gegeben.

Einige Routineüberlegungen und Ergänzungen sind nur beispielhaft ausgeführt oder auch ganz ohne Beweis notiert, damit die Darstellung nicht langatmig wird.

Zu Maple

Computeralgebrasysteme wie Maple können mit innovativen Ansätzen Lehre, Lernen und den Gebrauch von Mathematik nachhaltig reformieren oder gar revolutionieren. Wir stehen erst am Anfang einer rasanten Entwicklung.

Der Stoff kann effizienter und weniger fehleranfällig erarbeitet werden, als dies allein mit Bleistift und Papier bzw. Kreide und Tafel möglich ist. Vor allem können viel komplexere Beispiele bearbeitet und visualisiert werden. Die ausgeführten und didaktisch aufbereiteten Worksheets geben *Vorschläge* und *Anregungen,* die selbständig ergänzt und modifiziert werden können.

Maple ist dabei sicher kein Rundum-Sorglos-Paket. Wir haben an manchen Stellen deshalb auch auf Schwächen kritisch hingewiesen. Wie bei vielen Dingen im Computerbereich, wünschten sich die Nutzer auch hier ruhigere und dafür deutlich ausgereiftere ‚Produkt-Zyklen'. Neben faszinierenden Dingen stehen auch solche, bei denen man sich die Haare rauft.

Wir *nutzen* Maple nicht nur, wie oft zu sehen, sondern *gestalten* damit und *setzen Ideen um*, hier speziell der Funktionentheorie.

Wir sind überzeugt, mit diesem Buch einen neuen Qualitätsmaßstab zu setzen, was für die Akzeptanz von Computeralgebrasystemen im Hochschulbereich — auch ausbaufähig in Richtung *e-learning* — förderlich sein wird.

Natürlich soll niemand mühsam Maple-Code abtippen. Diesen findet man — später auch mit Aktualisierungen — über

http://www.springer.com/mathematics/analysis/book/978-3-642-29411-2 .

An die Lehrenden

Das Konzept des Buches basiert auf unseren langjährigen Erfahrungen mit recht verschiedenartigen Veranstaltungen aus dem Gesamtspektrum der Analysis. Neben vielen Vorlesungen für Mathematik- und Physikstudenten der Anfangssemester bis hin zum Aufbaustudium an den Universitäten Konstanz und Ulm haben wir beide oft auch Serviceveranstaltungen abgehalten und so Gespür dafür entwickelt, was außerhalb des ‚Elfenbeinturms' benötigt wird. Gerade durch die Anforderung, Mathematik auf sehr verschiedenen Niveaus bei unterschiedlichen Ausrichtungen und zum Teil noch deutlich auseinander liegenden Eingangsvoraussetzungen zu lehren, ist im Laufe der Zeit vieles mehrfach überarbeitet, geglättet, verbessert und ergänzt worden und auf diese Weise ein — mathematisch und didaktisch — überzeugendes und bewährtes Konzept entstanden. Leistungsfähige und zugkräftige Methoden erwachsen in dieser Darstellung aus dem Zusammenspiel zwischen mathematisch ‚richtiger' Sichtweise, die Eleganz und Transparenz nach sich zieht, und Anwendungsorientierung.

Was die Kombination der Funktionentheorie mit Maple angeht, wird von uns Neuland beschritten, wo sich viele noch unwohl fühlen oder auch überhaupt nicht auskennnen. Die Skepsis mancher Kollegen ist auch uneingestandene Angst vor dem Unbekannten und noch nicht Vertrauten. Wir wollen besonders auch diejenigen Kollegen ansprechen, sie ermuntern und ihnen Hilfen geben, die bisher dem Einsatz von Computeralgebrasystemen auch in der Lehre eher skeptisch und distanziert gegenüberstehen. Die Möglichkeiten, das Lernen und Begreifen von Mathematik durch ein solches System zu unterstützen, sind faszinierend — nur wissen das viele Kollegen noch gar nicht und verschanzen sich deshalb hinter Beckmesserei.

Wir sind überzeugt, daß unser Buch langfristig neben den Klassikern der Funktionentheorie einen festen und besonderen Platz im Angebot einnehmen wird. Im Vergleich etwa zu Fischer/Lieb, Conway oder Ahlfors liegen mathematisches Niveau und Stoffumfang hier *etwas* niedriger.

Es ist kein Buch allein für die Kollegen, sondern vor allem für die Lernenden, aber sicher kein Nürnberger Trichter. Die Lernenden werden von uns ein Stück des Weges an der Hand geführt, sie bekommen die Schönheiten am Wegesrand gezeigt, sie werden allerdings nicht in einer Sänfte getragen!

Da sich das Buch nicht ausschließlich an Studierende der Mathematik oder auch Physik und sicher nicht an Spezialisten wendet, hat es — in Umfang, Tiefe und Stoffauswahl — deutlich andere und wesentlich bescheidenere

Ziele als etwa die Darstellungen von Freitag/Busam, Remmert, Behnke/Sommer oder auch Hurwitz/Courant. Diese empfehlen wir interessierten Studenten, insbesondere auch wegen der bewundernswerten Fülle der Geschichtsbezüge und Anwendungen, zur ergänzenden und weiterführenden Lektüre.

Für den Gebrauch zu und neben Vorlesungen haben wir insgesamt einen realistischen Zeitplan im Auge und mußten uns so beschränken!

An die Lernenden

Mathematik lernt man — wie fast alles im Leben — vor allem durch eigenes Tun. Man sollte beim Durcharbeiten eines Mathematikbuches Bleistift, Papier und einen (großen) Papierkorb — und in diesem speziellen Fall einen Computer mit Maple — parat haben und fleißig nutzen.

Ausdrücklich sei gesagt: Die Länge der Darstellung eines einzelnen Themas in der Vorlesung oder in einem Buch entspricht nur selten dem zeitlichen Aufwand, der für das Durcharbeiten bis zum wirklichen Verständnis erforderlich ist.

Zum Gebrauch des Buches

$\square$ soll das Ende eines Beweises optisch hervorheben. Mit „$\surd$“ haben wir gelegentlich Routine-Überlegungen ‚abgehakt‘. Manche Dinge haben wir grau oder farbig eingerahmt, um sie optisch stärker hervorzuheben. Natürlich gehört etwa bei Symbolen oder Notierungsweisen der Rahmen nicht dazu. In Beweisen haben wir ‚linke Seite‘ und ‚rechte Seite‘ mit ‚$\ell.S.$‘ bzw. ‚$r.S.$‘ abgekürzt. ‚Œ‘ steht für *„Ohne Einschränkung“*.

Häufig haben wir einzelne Wörter oder Formulierungen mit einfachen Anführungsstrichen versehen: Dabei handelt es sich meist um eigentlich noch zu präzisierende Dinge.

Die Beispiele im Text sind abschnittsweise numeriert. Bemerkungen, Sätze und Folgerungen sind *gemeinsam* kapitelweise numeriert. Es kann also eine Bemerkung 3 auftreten, ohne daß es Bemerkung 1 und 2 gibt. Innerhalb eines Kapitels *zitieren* wir mit der jeweiligen Nummer. Mit *Satz n.m* hingegen zitieren wir Satz m aus Kapitel n aus einem anderen Kapitel oder den MWSs heraus.

Animationen, die im Buch nur auszugsweise zu sehen sind, haben wir am Rande durch das Symbol

gekennzeichnet.

Durch die *Daumenindizes* können die einzelnen Kapitel schnell aufgefunden werden.

Wenn wir $z = x + iy$ für $z \in \mathbb{C}$ schreiben, meinen wir implizit $x, y \in \mathbb{R}$, ohne das an allen Stellen zu vermerken. Ebenso bedeutet $\nu \geq N$ für $N \in \mathbb{N}_0$ ‚automatisch‘ auch $\nu \in \mathbb{N}_0$.

Zum Maple-Layout

Da die recht einfache Darstellung über ‚Export LaTeX' unter Maple bei uns doch viele Wünsche — für eine Buchwiedergabe — offenließ, haben wir einen eigenen, uns voll befriedigenden Stil für die Ein- und Ausgabe von Maple gewählt und dabei das mögliche Zusammenspiel Maple-LaTeX-PostScript genutzt. Um ein besseres Schriftbild zu erhalten, haben wir manche Ausgaben geringfügig ‚geschönt', z. B. Klammern weggelassen oder hinzugefügt, manchmal etwa φ statt Φ oder P_1 statt P_1 geschrieben. Um Platz zu sparen, sind oft Maple-Ausgaben (auch Graphiken) nebeneinander plaziert. Titel von Graphiken wurden durchgehend im Text gesetzt.

Dank

Gern benutzen wir diese Gelegenheit, um noch einmal all denen zu danken, die uns bei der Erstellung des Buches unterstützt haben. Nur einige davon wollen wir namentlich besonders erwähnen:

Das gesamte Manuskript (Text und MWSs) haben durchgesehen Markus Sigg und Matthias Söhn. Jochen Fischer hat den gesamten Textteil Korrektur gelesen. Sie waren uns mit ihrer Sorgfalt eine große Hilfe, gelegentlich sehr kritisch und mahnend, immer der Sache dienend. Die Verantwortung für eventuell noch verbliebene Fehler liegt natürlich allein bei uns.

Gerlinde Adam und Natalia Fibich haben insbesondere Symbol-, Namen- und Sachverzeichnis vorbereitet. Simon Huhn hat u. a. verschiedene www-Präsentationen selbständig erstellt. Daniel Fleischer hat schöne Ideen eingebracht und D.H. einige Arbeiten abgenommen und diese sehr selbständig ausgeführt.

Unser Projekt *„Mathematik leichter lernen — mit Maple"*,

bei dem wir uns langfristig vorstellen, große Teile des Grundstudiums durch Vorlesungstexte abzudecken, die mit Maple begleitet, aufbereitet und wesentlich vertieft werden, hat schon vielfältige Anerkennung gefunden: W.F. hat von der Universität Ulm einen Lehrbonus für hervorragende Leistungen in der Lehre (Einsatz von Maple) erhalten. D.H. hat drei Jahre lang Projektmittel vom Ausschuß für Lehrfragen und Weiterbildung (Alw) und dem Senat der Universität Konstanz für innovative Initiativen in der Lehre erhalten.

Rainer Janssen verdankt D.H. als gutem Freund Anregungen, Ermutigung und manchen Rat, was das Arbeitsumfeld angeht.