Helmut Fischer, Helmut Kaul

Mathematik für Physiker

Band 1: Grundkurs

6. Auflage

Teubner

Teubner Studienbücher Mathematik

Helmut Fischer, Helmut Kaul

Mathematik für Physiker

Helmut Fischer, Helmut Kaul

Mathematik für Physiker

Band 1: Grundkurs

6., überarbeitete Ausgabe

Teubner

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dr. rer. nat Helmut Fischer

Akad. Oberrat i. R., geb. 1936 in Wuppertal. Ab 1955 Studium der Mathematik und Physik, Universität Tübingen bei E. Kamke, H. Wielandt und W. Braunbek. Angestellten- und Assistententätigkeit am Mathematischen Institut der Universität Tübingen, 1967 Promotion bei H. Wielandt. 1969-2001 Rat/Oberrat am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

Dr. rer. nat Helmut Kaul

Geboren 1936 in Gleiwitz. 1958-1965 Studium der Mathematik und Physik, Universität Göttingen und FU Berlin bei H. Grauert, K.-P. Grotemeyer, W. Klingenberg und S. Hildebrandt. 1970 Promotion, Universität Mainz. 1971-1977 Wiss. Rat und Professor, GHS Duisburg. 1978-2001 Professor, Universität Tübingen.

1. Auflage 1988
6., überarb. Auflage 2007

Lektorat: Ulrich Sandten / Kerstin Hoffmann

Der B.G. Teubner Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.teubner.de

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8351-0165-4

Vorwort

Bei unseren Mathematikvorlesungen für Physiker stellten wir immer wieder fest, daß es zwar eine Fülle vorzüglicher Einzeldarstellungen der verschiedenen mathematischen Teilgebiete gibt, daß aber eine auf naturwissenschaftliche Fragestellungen zugeschnittene Zusammenfassung bisher fehlte.

Mit diesem ersten von insgesamt drei Bänden wollen wir dem Physiker eine integrierte Darstellung der für ihn wichtigsten mathematischen Grundlagen, wie sie üblicherweise im Grundstudium behandelt werden, an die Hand geben.

Im zweiten Band behandeln wir gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen und Operatoren der Quantenmechanik. Der dritte Band ist der Variationsrechnung, der Differentialgeometrie und den mathematischen Grundlagen der Relativitätstheorie gewidmet.

Beim Aufbau des ersten Bandes war zu berücksichtigen, daß die Vektorrechnung und der Differential– und Integralkalkül bis hin zur Schwingungsgleichung möglichst früh bereitgestellt werden sollten. Schon deswegen verbot sich eine Gliederung nach getrennten mathematischen Einzeldisziplinen. Darüberhinaus sind wir nach dem Prinzip verfahren, Anwendungen gleich dort vorzustellen, wo die entsprechenden Hilfsmittel bereitstehen. Dies gilt insbesondere für Differentialgleichungen.

Wegen der Fülle des zu behandelnden Stoffs fiel uns die gezielte Auswahl nicht leicht, und wir mußten schweren Herzens auf viele schöne Anwendungen, Beispiele und historische Anmerkungen verzichten.

Es sollen hier nicht in erster Linie fertige Lösungsverfahren vermittelt werden, wichtiger – und übrigens oft leichter zu merken – ist der Weg dorthin. Erst wer sich die dabei auftretenden Probleme bewußt gemacht hat kann deren Lösung würdigen. Oft ist mit der Klärung einer mathematischen Schwierigkeit auch eine physikalische Einsicht verbunden. Zum Problembewußtsein sollen die eingestreuten historischen Bemerkungen sowie die Gegenbeispiele und „pathologischen“ Fälle beitragen, vor allem aber die Beweise.

Für die zunehmend anspruchsvollen Theorien der Physik bedarf es neben der unerläßlichen Intuition auch der Sicherheit im Umgang mit der Mathematik. Deshalb werden im ersten Teil die meisten Beweise ausgeführt. Erst später gehen wir dazu über, in Einzelfällen auf die Literatur zu verweisen, insbesondere bei technisch schwierigen Beweisen, wenn diese keine besonderen Einsichten vermitteln.

Wenn wir an manchen Stellen nicht volle Allgemeinheit anstrebten, sondern uns auf typische Fälle beschränkt haben, so geschah dies in der Erwartung, daß der Leser analoge Fälle durch Übertragung der gelernten Methoden selbst bewältigen kann.

Durch den Anklang, den die bisherigen Auflagen fanden, fühlen wir uns in dem eingeschlagenen Weg bestätigt. Nachdem wir für die vierte Auflage eine gründliche Überarbeitung vorgenommen hatten, bedurfte es für die fünfte und die vorliegende sechste Auflage nur noch punktueller Änderungen; dies betrifft vor allem Passagen, die sich im praktischen Einsatz als noch nicht klar und verständlich genug erwiesen hatten.

Wir danken allen, die uns durch Verbesserungsvorschläge, Hinweise auf Fehler und kritische Anmerkungen unterstützt haben. Unserer ganz besonderer Dank gilt Herrn Hungerbühler für die Korrektur und den Druck aller folgenden Auflagen. Ohne seinen Einsatz, seine Geduld und sein Verständnis für die Wünsche und Nöte der Autoren hätte dieses Buch weder entstehen noch neu bearbeitet werden können.

Tübingen, August 2007 H. Fischer, H. Kaul

Zum Gebrauch

Gegliedert wurde nach Paragraphen, Abschnitten und Unterabschnitten. Mit dem Zitat § 9 : 4.2 wird Abschnitt 4, Unterabschnitt 2 in Paragraph 9 aufgerufen; innerhalb von § 9 wird die betreffende Stelle einfach mit 4.2 zitiert. Nummer und Überschrift des gerade anstehenden Paragraphen und Abschnittes befinden sich in der Kopfzeile.

Durch das Symbol $\boxed{\text{ÜA}}$ (Übungsaufgabe) wird der Leser aufgefordert, einfache Rechnungen, Beweisschritte und Übungsbeispiele selbst auszuführen.

Mit einem * sind solche Abschnitte markiert, die zwar inhaltlich an die betreffende Stelle gehören, bei der ersten Lektüre aber übergangen werden können.

Der Namensindex enthält die Lebensdaten der in den historischen Anmerkungen erwähnten Personen. Ein Verzeichnis der Symbole und Abkürzungen befindet sich vor dem Index am Ende des Buches.

Wegweiser

Der Leser muß sich nicht streng an die hier gewählte Reihenfolge halten. Wer beispielsweise einen schnellen Zugang zur Differential– und Integralrechnung sucht, kann die Paragraphen 4–7 zunächst übergehen. Die Lineare Algebra setzt im wesentlichen nur die Paragraphen 1, 2 und 5 voraus. Für die Funktionentheorie sind nur ganz wenige Begriffe aus den Kapiteln IV, V und VI erforderlich. Die Paragraphen 4 und 13 gehen in den übrigen Stoff nicht wesentlich ein.

Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge von unseren Lesern nehmen die Autoren dankbar entgegen unter `helmut.kaul@uni-tuebingen.de`.

Inhalt

Kapitel IV Lineare Algebra

Kapitel I
Grundlagen

§ 1 Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

1 Vorläufiges über Mengen und Aussagen

„Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen". So beginnen die 1895 erschienenen „Beiträge zur Begründung der Mengenlehre" von Georg CANTOR. Diese „naive" Definition soll uns als Ausgangspunkt genügen.

1.1 Bezeichnungen. Mengen bezeichnen wir i.a. mit Großbuchstaben. Ist m ein Element von M, d.h. gehört m zur Menge M, so schreiben wir $m \in M$ und sagen kurz „m Element M" oder „m aus M".

Daß n nicht zu M gehört drücken wir durch $n \notin M$ aus. In § 1, § 2 betrachten wir nur Mengen von reellen Zahlen. Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

$\mathbb{R}$ für die Menge der reellen Zahlen,
$\mathbb{Q}$ für die Menge der rationalen Zahlen,
$\mathbb{Z}$ für die Menge der ganzen Zahlen,
$\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots,$
$\mathbb{N}_0$ für die Menge der Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots.$

1.2 Beispiele und Schreibweisen

$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist einstellige Primzahl}\} = \{2, 3, 5, 7\},$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x = 0\} = \{0, 4\},$
$\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4x = 0\} = \{4\},$
$\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 4, 9, \ldots\},$
$\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist eine gerade Zahl}\} = \{2m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{0, 2, -2, 4, -4, \ldots\}.$

Damit haben wir die wichtigsten Darstellungsformen für Mengen:

1. Auflisten der Elemente in einer Mengenklammer $\{\ldots\}$.

2. Für eine Aussageform $E(x)$ bezeichnet $\{x \in M \mid E(x)\}$ die Menge aller $x \in M$, für welche die Aussage $E(x)$ erfüllt ist.

3. Ist $f(x)$ ein Funktionsausdruck, so ist $\{f(x) \mid x \in M\}$ die Menge aller Zahlen der Form $f(x)$ mit $x \in M$.

1.3 Mengeninklusion. $N \subset M$ („N enthalten in M") soll besagen, daß N eine Teilmenge von M ist. Das schließt den Fall $N = M$ ein. Wir schreiben auch $M \supset N$.

Beispiele: Demnach gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Für $K = \{x^3 - x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ ist jedenfalls $K \subset \mathbb{R}$. Wir zeigen später, daß sogar $K = \mathbb{R}$ ist.

1.4 Leere Menge. Ist eine Aussage $E(x)$ für kein $x \in M$ richtig, so nennen wir die Menge $\{x \in M \mid E(x)\}$ **leer**. So ist z.B. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$ leer. Aus formalen Gründen bezeichnen wir alle leeren Mengen einheitlich mit $\emptyset$ und setzen fest, daß $\emptyset$ Teilmenge von jeder Menge ist.

1.5 Gebrauch der Mengenschreibweise

Wenn wir mit Mengen arbeiten, treten diese immer als Teilmengen einer festen Grundmenge auf; in § 1 und § 2 immer als Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Die Worte „bestimmte wohlunterschiedene Objekte" bei Cantor sollen folgendes besagen: Es muß immer klar sein, welcher Natur die Elemente sind und wann zwei Elemente als gleich gelten sollen. Betrachten wir die Elemente von

$$S = \left\{ \tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{1}, \tfrac{2}{2}, \ldots, \tfrac{2}{9}, \ldots, \tfrac{9}{1}, \tfrac{9}{2}, \ldots, \tfrac{9}{9} \right\}$$

einfach als Schreibfiguren, so besteht S aus 81 verschiedenen Elementen. Deuten wir dagegen $\frac{n}{m}$ als Bruch, so ist $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \cdots = \frac{9}{9}$ usw., und

$$T = \left\{ \tfrac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid n, m \in \{1, 2, \ldots, 9\} \right\}$$

ist etwas ganz anderes als S. (Wie viele Elemente hat T?)

Bei der Auflistung einer Menge kommt es auf die Reihenfolge der Elemente und auf Wiederholung gleicher Elemente (wie bei T) nicht an.

1.6 Bemerkungen über Aussagen

An dieser Stelle kann und soll keine Formalisierung der Aussagenlogik stattfinden. Auch soll noch nichts Grundlegendes über mathematisches Schließen gesagt werden. In den folgenden zwei Abschnitten werden wir die mathematischen Schlußweisen an vielen Beispielen kennen und gebrauchen lernen; in § 4 werden dann die wichtigsten Schlußweisen zusammengefaßt.

Über Aussagen sei hier nur so viel gesagt: Mathematische Aussagen beziehen sich immer auf einen bestimmten Gegenstandsbereich der Mathematik; dort sind sie entweder wahr oder falsch, ein Drittes gibt es nicht (*tertium non datur*). Die Aussage „Die Gleichung $x + 2 = 1$ ist lösbar" ist wahr in der Theorie der ganzen Zahlen, aber falsch in der Theorie der natürlichen Zahlen.

Über den Gebrauch des Wortes *oder* vereinbaren wir: Sind $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ mathematische Aussagen, so soll die Aussage „$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$" besagen: $\mathcal{A}$ ist wahr oder $\mathcal{B}$ ist wahr oder $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind wahr. Die Aussage „entweder $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$" besagt dagegen, daß $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sich gegenseitig ausschließen und daß eine dieser beiden Aussagen wahr ist. Der Sinn der Aussagen „$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$" und „nicht $\mathcal{A}$" ist klar.

2 Vorläufiges über die reellen Zahlen

2.1 Was sind und was sollen die Zahlen?

So lautet der Titel einer 1888 erschienenen Abhandlung von Richard DEDEKIND. Der Autor sagt dazu : „Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlen-Reich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellung von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlen-Reich beziehen“ [DEDEKIND]. Der hier angesprochene „rein logische Aufbau der Zahlen-Wissenschaft“ war kurz zuvor, nicht zuletzt durch Dedekind, geleistet worden und markiert den Schlußpunkt einer fast viertausendjährigen Entwicklung der zunehmenden Erweiterung und Präzisierung des Zahlbegriffs, vergleiche dazu [TROPFKE et alt.]. Dieser Aufbau besitzt allerdings einen hohen Abstraktionsgrad und setzt Konstruktionsprinzipien der Mengenlehre und Methoden der Algebra voraus, die dem Leser nicht zur Verfügung stehen. Wir können daher nur zur Kenntnis nehmen, daß eine logisch saubere Fundierung des Zahlbegriffs auf der Basis der Mengenlehre möglich ist.

2.2 Wir stellen uns also auf den Standpunkt, daß uns die reellen Zahlen zur Verfügung stehen. Da wir sie auf „Raum und Zeit“ beziehen wollen, nehmen wir die geometrische Vorstellung zu Hilfe und denken uns die reellen Zahlen als Punkte auf der *Zahlengeraden*. Wegen der grundlegenden Bedeutung für die gesamte Mathematik müssen wir uns nur darüber verständigen, welche Eigenschaften wir den reellen Zahlen zuschreiben, und zwar im Hinblick auf das Rechnen und die Anordnung (Größenvergleich).

Es hat sich gezeigt, daß alle Eigenschaften von $\mathbb{R}$ auf wenige Grundannahmen zurückgeführt werden können, die im folgenden durch einen Balken am Rand gekennzeichnet sind. Für das Ihnen allen aus dem Schulunterricht geläufige Rechnen sind dies die nachfolgend aufgeführten Grundgesetze (3.1 bis 3.3). Daß in diesen wirklich alle anderen Rechenregeln wie $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$, $(-a)\cdot(-b) = a \cdot b$ usw. enthalten sind, wollen wir nicht nachprüfen, sondern den Algebraikern glauben. Anders steht es mit der Anordnung von $\mathbb{R}$, die im Schulunterricht nicht immer mit der notwendigen Ausführlichkeit und Strenge behandelt werden kann. Hier werden wir sehr gründlich vorgehen müssen, da Präzision und Sicherheit im Umgang mit Ungleichungen und den mit der *Vollständigkeit* (§2) zusammenhängenden Begriffsbildungen grundlegend für die gesamte Analysis sind.

2.3 Für physikalische Messungen, Größenangaben und Rechnungen würden die rationalen Zahlen ausreichen. Für die Zwecke der Analysis und der Geometrie erweisen sie sich als „zu lückenhaft“. Erst ihre Ergänzung zu den reellen