

Helmut Fischer, Helmut Kaul

# Mathematik für Physiker

Band 1: Grundkurs

6. Auflage



*Teubner Studienbücher Mathematik*

Helmut Fischer, Helmut Kaul

# **Mathematik für Physiker**

Helmut Fischer, Helmut Kaul

# Mathematik für Physiker

**Band 1: Grundkurs**

6., überarbeitete Ausgabe



**Teubner**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der  
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

### **Dr. rer. nat Helmut Fischer**

Akad. Oberrat i. R., geb. 1936 in Wuppertal. Ab 1955 Studium der Mathematik und Physik, Universität Tübingen bei E. Kamke, H. Wielandt und W. Braunbek. Angestellten- und Assistententätigkeit am Mathematischen Institut der Universität Tübingen, 1967 Promotion bei H. Wielandt. 1969-2001 Rat/Oberrat am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

### **Dr. rer. nat Helmut Kaul**

Geboren 1936 in Gleiwitz. 1958-1965 Studium der Mathematik und Physik, Universität Göttingen und FU Berlin bei H. Grauert, K.-P. Grotemeyer, W. Klingenberg und S. Hildebrandt. 1970 Promotion, Universität Mainz. 1971-1977 Wiss. Rat und Professor, GHS Duisburg. 1978-2001 Professor, Universität Tübingen.

1. Auflage 1988

6., überarb. Auflage 2007

Alle Rechte vorbehalten

© B.G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2007

Lektorat: Ulrich Sandten / Kerstin Hoffmann

Der B.G. Teubner Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.  
[www.teubner.de](http://www.teubner.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, [www.CorporateDesignGroup.de](http://www.CorporateDesignGroup.de)  
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach  
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.  
Printed in Germany

ISBN 978-3-8351-0165-4

# Vorwort

Bei unseren Mathematikvorlesungen für Physiker stellten wir immer wieder fest, daß es zwar eine Fülle vorzüglicher Einzeldarstellungen der verschiedenen mathematischen Teilgebiete gibt, daß aber eine auf naturwissenschaftliche Fragestellungen zugeschnittene Zusammenfassung bisher fehlte.

Mit diesem ersten von insgesamt drei Bänden wollen wir dem Physiker eine integrierte Darstellung der für ihn wichtigsten mathematischen Grundlagen, wie sie üblicherweise im Grundstudium behandelt werden, an die Hand geben.

Im zweiten Band behandeln wir gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen und Operatoren der Quantenmechanik. Der dritte Band ist der Variationsrechnung, der Differentialgeometrie und den mathematischen Grundlagen der Relativitätstheorie gewidmet.

Beim Aufbau des ersten Bandes war zu berücksichtigen, daß die Vektorrechnung und der Differential- und Integralkalkül bis hin zur Schwingungsgleichung möglichst früh bereitgestellt werden sollten. Schon deswegen verbot sich eine Gliederung nach getrennten mathematischen Einzeldisziplinen. Darüberhinaus sind wir nach dem Prinzip verfahren, Anwendungen gleich dort vorzustellen, wo die entsprechenden Hilfsmittel bereitstehen. Dies gilt insbesondere für Differentialgleichungen.

Wegen der Fülle des zu behandelnden Stoffs fiel uns die gezielte Auswahl nicht leicht, und wir mußten schweren Herzens auf viele schöne Anwendungen, Beispiele und historische Anmerkungen verzichten.

Es sollen hier nicht in erster Linie fertige Lösungsverfahren vermittelt werden, wichtiger – und übrigens oft leichter zu merken – ist der Weg dorthin. Erst wer sich die dabei auftretenden Probleme bewußt gemacht hat kann deren Lösung würdigen. Oft ist mit der Klärung einer mathematischen Schwierigkeit auch eine physikalische Einsicht verbunden. Zum Problembewußtsein sollen die eingestreuten historischen Bemerkungen sowie die Gegenbeispiele und „pathologischen“ Fälle beitragen, vor allem aber die Beweise.

Für die zunehmend anspruchsvollen Theorien der Physik bedarf es neben der unerläßlichen Intuition auch der Sicherheit im Umgang mit der Mathematik. Deshalb werden im ersten Teil die meisten Beweise ausgeführt. Erst später gehen wir dazu über, in Einzelfällen auf die Literatur zu verweisen, insbesondere bei technisch schwierigen Beweisen, wenn diese keine besonderen Einsichten vermitteln.

Wenn wir an manchen Stellen nicht volle Allgemeinheit anstrebten, sondern uns auf typische Fälle beschränkt haben, so geschah dies in der Erwartung, daß der Leser analoge Fälle durch Übertragung der gelernten Methoden selbst bewältigen kann.

Durch den Anklang, den die bisherigen Auflagen fanden, fühlen wir uns in dem eingeschlagenen Weg bestätigt. Nachdem wir für die vierte Auflage eine gründliche Überarbeitung vorgenommen hatten, bedurfte es für die fünfte und die vorliegende sechste Auflage nur noch punktueller Änderungen; dies betrifft vor allem Passagen, die sich im praktischen Einsatz als noch nicht klar und verständlich genug erwiesen hatten.

Wir danken allen, die uns durch Verbesserungsvorschläge, Hinweise auf Fehler und kritische Anmerkungen unterstützt haben. Unserer ganz besonderer Dank gilt Herrn Hungerbühler für die Korrektur und den Druck aller folgenden Auflagen. Ohne seinen Einsatz, seine Geduld und sein Verständnis für die Wünsche und Nöte der Autoren hätte dieses Buch weder entstehen noch neu bearbeitet werden können.

Tübingen, August 2007

H. Fischer, H. Kaul

## Zum Gebrauch

Gegliedert wurde nach Paragraphen, Abschnitten und Unterabschnitten. Mit dem Zitat § 9 : 4.2 wird Abschnitt 4, Unterabschnitt 2 in Paragraph 9 aufgerufen; innerhalb von § 9 wird die betreffende Stelle einfach mit 4.2 zitiert. Nummer und Überschrift des gerade anstehenden Paragraphen und Abschnittes befinden sich in der Kopfzeile.

Durch das Symbol  $\boxed{\ddot{U}A}$  (Übungsaufgabe) wird der Leser aufgefordert, einfache Rechnungen, Beweisschritte und Übungsbeispiele selbst auszuführen.

Mit einem \* sind solche Abschnitte markiert, die zwar inhaltlich an die betreffende Stelle gehören, bei der ersten Lektüre aber übergangen werden können.

Der Namensindex enthält die Lebensdaten der in den historischen Anmerkungen erwähnten Personen. Ein Verzeichnis der Symbole und Abkürzungen befindet sich vor dem Index am Ende des Buches.

## Wegweiser

Der Leser muß sich nicht streng an die hier gewählte Reihenfolge halten. Wer beispielsweise einen schnellen Zugang zur Differential- und Integralrechnung sucht, kann die Paragraphen 4–7 zunächst übergangen. Die Lineare Algebra setzt im wesentlichen nur die Paragraphen 1, 2 und 5 voraus. Für die Funktionentheorie sind nur ganz wenige Begriffe aus den Kapiteln IV, V und VI erforderlich. Die Paragraphen 4 und 13 gehen in den übrigen Stoff nicht wesentlich ein.

**Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge** von unseren Lesern nehmen die Autoren dankbar entgegen unter [helmut.kaul@uni-tuebingen.de](mailto:helmut.kaul@uni-tuebingen.de).

# Inhalt

## Kapitel I Grundlagen

### § 1 Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

1 Vorläufiges über Mengen und Aussagen . . . . .	13
2 Vorläufiges über die reellen Zahlen . . . . .	15
3 Rechengesetze für reelle Zahlen . . . . .	16
4 Das Rechnen in $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ . . . . .	16
5 Die Anordnung der reellen Zahlen . . . . .	17
6 Vollständige Induktion . . . . .	21
7 Intervalle . . . . .	25
8 Beschränkte Mengen, obere und untere Schranken . . . . .	26
9 Maximum und Minimum . . . . .	27
10 Archimedische Anordnung von $\mathbb{Q}$ . . . . .	28
11 Die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ . . . . .	28
12 Zur Lückenhaftigkeit von $\mathbb{Q}$ . . . . .	29

### § 2 Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ , konvergente Folgen

1 Supremum und Infimum . . . . .	30
2 Folgerungen aus dem Supremumsaxiom . . . . .	31
3 Folgen, Rekursion, Teilfolgen . . . . .	34
4 Nullfolgen . . . . .	35
5 Sätze über Nullfolgen . . . . .	39
6 Grenzwerte von Folgen . . . . .	40
7 Existenz der $m$ -ten Wurzel, rationale Potenzen . . . . .	44
8 Intervallschachtelungen . . . . .	45
9 Grenzwertfreie Konvergenzkriterien . . . . .	48

### § 3 Elementare Funktionen

1 Die Folge $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ . . . . .	52
2 Die Exponentialfunktion . . . . .	54
3 Funktionen (Abbildungen) . . . . .	57
4 Die Logarithmusfunktion . . . . .	60
5 Die allgemeine Potenz und der Zehnerlogarithmus . . . . .	61
6 Zusammengesetzte Funktionen . . . . .	62
7 Polynome und rationale Funktionen . . . . .	63
8 Die trigonometrischen Funktionen . . . . .	69

### § 4 Mengen und Wahrscheinlichkeit

1 Einfache Mengenalgebra . . . . .	76
2 Exkurs über logisches Schließen und Beweistechnik . . . . .	78
3 Notwendige und hinreichende Bedingungen . . . . .	80
4 Beliebige Vereinigungen und Durchschnitte . . . . .	80

5	Beispiele zur Wahrscheinlichkeit . . . . .	81
6	Das mathematische Modell endlicher Zufallsexperimente . . . . .	83
7	Das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten . . . . .	86
8	Kombinatorische Grundformeln (Teil I) . . . . .	88
9	Binomialkoeffizienten und Binomialverteilung . . . . .	93
10*	Kombinatorische Grundformeln (Teil II) . . . . .	98

## Kapitel II Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$

### § 5 Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$ , komplexe Zahlen

1	Vektorielle Größen in der Physik . . . . .	100
2	Vektoren in der ebenen Geometrie . . . . .	100
3	Koordinatendarstellung von Punkten und Vektoren . . . . .	104
4	Punkte und Vektoren . . . . .	107
5	Geraden und Strecken, Schnitt zweier Geraden . . . . .	108
6	Lineare $2 \times 2$ -Gleichungssysteme . . . . .	110
7	Abstand, Norm, Winkel, ebene Drehungen . . . . .	111
8	Die komplexen Zahlen . . . . .	114
9	Die komplexe Exponentialfunktion . . . . .	120
10	Der Fundamentalsatz der Algebra, Beispiele . . . . .	121
11	Drehungen und Spiegelungen in komplexer Schreibweise . . . . .	124

### § 6 Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$

1	Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ . . . . .	126
2	Skalarprodukt, Längen, Winkel . . . . .	128
3	Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	132
4	Entwicklung nach Orthonormalsystemen, Orthonormalbasen . . . . .	137
5	Aufgaben . . . . .	139

## Kapitel III Analysis einer Veränderlichen

### § 7 Unendliche Reihen

1	Reihen im Reellen . . . . .	141
2	Konvergenzkriterien für Reihen . . . . .	145
3	Komplexe Folgen, Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ . . . . .	148
4	Reihen mit komplexen Gliedern . . . . .	150
5	Cauchy-Kriterium und Majorantenkriterium . . . . .	152
6	Umordnung von Reihen . . . . .	154
7	Das Cauchy-Produkt . . . . .	158

### § 8 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

1	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	159
2	Stetigkeit . . . . .	165
3	Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen . . . . .	167
4	Die Hauptsätze über stetige Funktionen . . . . .	168
5	Die Stetigkeit der Umkehrfunktion . . . . .	172



6*	Der Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit . . . . .	173
<b>§ 9</b>	<b>Differentialrechnung</b>	
1	Vorbemerkungen . . . . .	175
2	Differenzierbarkeit und Ableitung . . . . .	177
3	Differentiation zusammengesetzter Funktionen . . . . .	180
4	Mittelwertsätze und Folgerungen . . . . .	183
5	Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion und Beispiele . . . . .	185
6	Höhere Ableitungen und $C^n$ -Funktionen . . . . .	187
7	Taylorentwicklung . . . . .	189
8	Lokale Minima und Maxima . . . . .	193
9	Bestimmung von Grenzwerten nach de l'Hospital . . . . .	195
<b>§ 10</b>	<b>Reihenentwicklungen und Schwingungen</b>	
1	Taylorreihen . . . . .	197
2	Potenzreihen . . . . .	203
3	Gliedweise Differenzierbarkeit und Identitätssatz . . . . .	206
4	Theorie der Schwingungsgleichung . . . . .	208
5	Lösung der Schwingungsgleichung durch komplexen Ansatz . . . . .	213
<b>§ 11</b>	<b>Integralrechnung</b>	
1	Treppenfunktionen und ihr Integral . . . . .	217
2	Der gleichmäßige Abstand zweier beschränkter Funktionen . . . . .	220
3	Integrierbare Funktionen und Eigenschaften des Integrals . . . . .	222
4	Zwei wichtige Klassen integrierbarer Funktionen . . . . .	225
5	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	227
6	Partielle Integration . . . . .	231
7	Die Substitutionsregel . . . . .	234
8	Integration rationaler Funktionen . . . . .	239
9	Integrale mit Potenzen von $\sqrt{x^2 + \alpha x + \beta}$ . . . . .	243
10	Übergang zum halben Winkel . . . . .	245
11	Schlußbemerkungen . . . . .	246
<b>§ 12</b>	<b>Vertauschung von Grenzprozessen, uneigentliche Integrale</b>	
1	Problemstellungen, Beispiele . . . . .	248
2	Gleichmäßige Konvergenz von Folgen und Reihen . . . . .	249
3	Vertauschung von Grenzübergängen . . . . .	254
4	Uneigentliche Integrale . . . . .	258
5	Substitution und partielle Integration, Gamma-Funktion . . . . .	263
<b>§ 13</b>	<b>Elementar integrierbare Differentialgleichungen</b>	
1	Die lineare Differentialgleichung $y' = a(x)y + b(x)$ . . . . .	268
2	Zwei aufschlußreiche Beispiele . . . . .	273
3	Die separierte Differentialgleichung $y' = a(x)b(y)$ . . . . .	275
4	Zurückführung auf getrennte Variable . . . . .	282
5	Wegweiser: Differentialgleichungen in Band 1 und Band 2 . . . . .	283

## Kapitel IV Lineare Algebra

### § 14 Vektorräume

1	Wovon handelt lineare Algebra?	284
2	Vektorräume	286
3	Teilräume	289
4	Linearkombinationen, lineare Hülle, Erzeugendensystem	291
5	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	292
6	Vektorräume mit Basis	294

### § 15 Lineare Abbildungen und Matrizen

1	Beispiele linearer Abbildungen	299
2	Die Dimensionsformel	301
3	Verknüpfung linearer Abbildungen	303
4	Lineare Abbildungen und Matrizen	303
5	Matrizenrechnung	307
6	Invertierbare lineare Abbildungen und reguläre Matrizen	312
7	Basiswechsel und Koordinatentransformation	313

### § 16 Lineare Gleichungen

1	Problemstellungen und Beispiele	315
2	Allgemeines zur Lösbarkeit und zur Lösungsmenge	316
3	Rangbedingungen	317
4	Das Eliminationsverfahren für lineare Gleichungssysteme	319
5	Interpolation und numerische Quadratur	324
6	Die Methode der kleinsten Quadrate	327

### § 17 Determinanten

1	Beispiele	329
2	Die Definition der Determinante	331
3	Die Eigenschaften der Determinante	336
4	Das Volumen von Parallelepipeden	340
5*	Orientierung und Determinante	343

### § 18 Eigenwerte und Eigenvektoren

1	Diagonalisierbarkeit und Eigenwertproblem	344
2	Eigenwerte und Eigenvektoren	346
3	Das charakteristische Polynom	348
4	Diagonalisierbarkeit von Operatoren	350
5	Entkopplung von Systemen linearer Differentialgleichungen	353

### § 19 Skalarprodukte, Orthonormalsysteme und unitäre Gruppen

1	Skalarprodukträume	355
2	Orthonormalsysteme und orthogonale Projektionen	358
3	Das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt	362
4	Unitäre Abbildungen und Matrizen	364
5	Matrix- und Transformationsgruppen	369

**§ 20 Symmetrische Operatoren und quadratische Formen**

1 Quadratische Formen . . . . .	374
2 Symmetrische Operatoren und quadratische Formen . . . . .	376
3 Diagonalisierbarkeit symmetrischer Operatoren . . . . .	378
4 Hauptachsentransformation . . . . .	380
5 Gekoppelte Systeme von Massenpunkten . . . . .	384

**Kapitel V Analysis mehrerer Variabler****§ 21 Topologische Grundbegriffe normierter Räume**

1 Normierte Räume . . . . .	388
2 Konvergente Folgen . . . . .	390
3 Offene und abgeschlossene Mengen . . . . .	391
4 Inneres, Äußeres, Abschluß und Rand einer Menge . . . . .	394
5 Vollständigkeit . . . . .	396
6 Kompakte Teilmengen . . . . .	397
7 Stetige Funktionen . . . . .	399
8 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen . . . . .	403
9 Zusammenhang, Gebiete . . . . .	404

**§ 22 Differentialrechnung im  $\mathbb{R}^n$** 

1 Differenzierbarkeit und Ableitung . . . . .	406
2 Rechenregeln für differenzierbare Funktionen . . . . .	414
3 Gradient, Richtungsableitung und Hauptsatz . . . . .	418
4 Der Satz von Taylor . . . . .	423
5 Der Umkehrsatz und der Satz über implizite Funktionen . . . . .	428
6 Lokale Extrema unter Nebenbedingungen . . . . .	438

**§ 23 Integralrechnung im  $\mathbb{R}^n$** 

1 Das Integral für Treppenfunktionen . . . . .	442
2 Integration stetiger Funktionen über kompakte Quader . . . . .	446
3 Das Volumen von Rotationskörpern . . . . .	450
4 Das Integral stetiger Funktionen über offene Mengen . . . . .	451
5 Parameterintegrale über offene Mengen . . . . .	456
6 Sukzessive Integration . . . . .	458
7 Das $n$ -dimensionale Volumen . . . . .	462
8 Der Transformationssatz und Anwendungen . . . . .	465

**Kapitel VI Vektoranalysis****§ 24 Kurvenintegrale**

1 Kurvenstücke . . . . .	470
2 Länge und Bogenlänge . . . . .	472
3 Skalare Kurvenintegrale . . . . .	475
4 Vektorielle Kurvenintegrale . . . . .	476
5 Konservative Vektorfelder und Potentiale . . . . .	480

6*	Kurvenintegrale und Potentiale in der Thermodynamik . . . . .	489
7	Divergenz, Laplaceoperator, Rotation, Vektorpotentiale . . . . .	491
<b>§ 25</b>	<b>Oberflächenintegrale</b>	
1	Flächenstücke im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	493
2	Der Flächeninhalt von Flächenstücken . . . . .	496
3	Oberflächenintegrale . . . . .	500
<b>§ 26</b>	<b>Die Integralsätze von Stokes, Gauß und Green</b>	
1	Übersicht . . . . .	504
2	Der Integralsatz von Stokes . . . . .	505
3	Der Stokessche Integralsatz in der Ebene . . . . .	515
4	Der Integralsatz von Gauß . . . . .	519
5	Anwendungen des Gaußschen Satzes, Greensche Formeln . . . . .	525
6	Anwendungen der Integralsätze in der Physik . . . . .	527
<b>Kapitel VII Einführung in die Funktionentheorie</b>		
<b>§ 27</b>	<b>Die Hauptsätze der Funktionentheorie</b>	
1	Holomorphie, Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen . . . . .	533
2	Komplexe Kurvenintegrale und Stammfunktionen . . . . .	537
3	Analytische Funktionen . . . . .	544
4	Der Cauchysche Integralsatz . . . . .	547
5	Die Cauchysche Integralformel und ihre Konsequenzen . . . . .	549
6	Ganze Funktionen und Satz von Liouville . . . . .	552
7	Der Satz von Morera und Folgerungen . . . . .	554
8	Zusammenfassung der Hauptsätze . . . . .	555
<b>§ 28</b>	<b>Isolierte Singularitäten, Laurent–Reihen und Residuensatz</b>	
1	Einteilung isolierter Singularitäten . . . . .	556
2	Laurent–Entwicklung . . . . .	557
3	Charakterisierung isolierter Singularitäten . . . . .	562
4	Der Residuenkalkül . . . . .	565
5	Der Residuensatz . . . . .	566
6	Berechnung von Reihen mit Hilfe des Residuensatzes . . . . .	567
7	Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes . . . . .	570
<b>Namen und Lebensdaten . . . . .</b>		<b>573</b>
<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>		<b>574</b>
<b>Symbole und Abkürzungen . . . . .</b>		<b>576</b>
<b>Index . . . . .</b>		<b>578</b>

# Kapitel I

## Grundlagen

### § 1 Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

#### 1 Vorläufiges über Mengen und Aussagen

„Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen“. So beginnen die 1895 erschienenen „Beiträge zur Begründung der Mengenlehre“ von Georg CANTOR. Diese „naive“ Definition soll uns als Ausgangspunkt genügen.

**1.1 Bezeichnungen.** Mengen bezeichnen wir i.a. mit Großbuchstaben. Ist  $m$  ein Element von  $M$ , d.h. gehört  $m$  zur Menge  $M$ , so schreiben wir  $m \in M$  und sagen kurz „ $m$  Element  $M$ “ oder „ $m$  aus  $M$ “.

Daß  $n$  nicht zu  $M$  gehört drücken wir durch  $n \notin M$  aus. In § 1, § 2 betrachten wir nur Mengen von reellen Zahlen. Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

- $\mathbb{R}$  für die Menge der reellen Zahlen,
- $\mathbb{Q}$  für die Menge der rationalen Zahlen,
- $\mathbb{Z}$  für die Menge der ganzen Zahlen,
- $\mathbb{N}$  für die Menge der natürlichen Zahlen  $1, 2, 3, \dots$ ,
- $\mathbb{N}_0$  für die Menge der Zahlen  $0, 1, 2, 3, \dots$ .

#### 1.2 Beispiele und Schreibweisen

$$\begin{aligned}\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist einstellige Primzahl}\} &= \{2, 3, 5, 7\}, \\ \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x = 0\} &= \{0, 4\}, \\ \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4x = 0\} &= \{4\}, \\ \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\} &= \{0, 1, 4, 9, \dots\}, \\ \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist eine gerade Zahl}\} &= \{2m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{0, 2, -2, 4, -4, \dots\}.\end{aligned}$$

Damit haben wir die wichtigsten Darstellungsformen für Mengen:

1. Auflisten der Elemente in einer Mengenklammer  $\{\dots\}$ .
2. Für eine Aussageform  $E(x)$  bezeichnet  $\{x \in M \mid E(x)\}$  die Menge aller  $x \in M$ , für welche die Aussage  $E(x)$  erfüllt ist.
3. Ist  $f(x)$  ein Funktionsausdruck, so ist  $\{f(x) \mid x \in M\}$  die Menge aller Zahlen der Form  $f(x)$  mit  $x \in M$ .

**1.3 Mengeninklusion.**  $N \subset M$  („ $N$  enthalten in  $M$ “) soll besagen, daß  $N$  eine Teilmenge von  $M$  ist. Das schließt den Fall  $N = M$  ein. Wir schreiben auch  $M \supset N$ .

BEISPIELE: Demnach gilt  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Für  $K = \{x^3 - x \mid x \in \mathbb{R}\}$  ist jedenfalls  $K \subset \mathbb{R}$ . Wir zeigen später, daß sogar  $K = \mathbb{R}$  ist.

**1.4 Leere Menge.** Ist eine Aussage  $E(x)$  für kein  $x \in M$  richtig, so nennen wir die Menge  $\{x \in M \mid E(x)\}$  **leer**. So ist z.B.  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$  leer. Aus formalen Gründen bezeichnen wir alle leeren Mengen einheitlich mit  $\emptyset$  und setzen fest, daß  $\emptyset$  Teilmenge von jeder Menge ist.

### 1.5 Gebrauch der Mengenschreibweise

Wenn wir mit Mengen arbeiten, treten diese immer als Teilmengen einer festen Grundmenge auf; in § 1 und § 2 immer als Teilmengen von  $\mathbb{R}$ .

Die Worte „bestimmte wohlunterschiedene Objekte“ bei Cantor sollen folgendes besagen: Es muß immer klar sein, welcher Natur die Elemente sind und wann zwei Elemente als gleich gelten sollen. Betrachten wir die Elemente von

$$S = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{9}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \dots, \frac{2}{9}, \dots, \frac{9}{1}, \frac{9}{2}, \dots, \frac{9}{9} \right\}$$

einfach als Schreibfiguren, so besteht  $S$  aus 81 verschiedenen Elementen. Deuten wir dagegen  $\frac{n}{m}$  als Bruch, so ist  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ ,  $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \dots = \frac{9}{9}$  usw., und

$$T = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid n, m \in \{1, 2, \dots, 9\} \right\}$$

ist etwas ganz anderes als  $S$ . (Wie viele Elemente hat  $T$ ?)

Bei der Auflistung einer Menge kommt es auf die Reihenfolge der Elemente und auf Wiederholung gleicher Elemente (wie bei  $T$ ) nicht an.

### 1.6 Bemerkungen über Aussagen

An dieser Stelle kann und soll keine Formalisierung der Aussagenlogik stattfinden. Auch soll noch nichts Grundlegendes über mathematisches Schließen gesagt werden. In den folgenden zwei Abschnitten werden wir die mathematischen Schlußweisen an vielen Beispielen kennen und gebrauchen lernen; in § 4 werden dann die wichtigsten Schlußweisen zusammengefaßt.

Über Aussagen sei hier nur so viel gesagt: Mathematische Aussagen beziehen sich immer auf einen bestimmten Gegenstandsbereich der Mathematik; dort sind sie entweder wahr oder falsch, ein Drittes gibt es nicht (*tertium non datur*). Die Aussage „Die Gleichung  $x + 2 = 1$  ist lösbar“ ist wahr in der Theorie der ganzen Zahlen, aber falsch in der Theorie der natürlichen Zahlen.

Über den Gebrauch des Wortes *oder* vereinbaren wir: Sind  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  mathematische Aussagen, so soll die Aussage „ $\mathcal{A}$  oder  $\mathcal{B}$ “ besagen:  $\mathcal{A}$  ist wahr oder  $\mathcal{B}$  ist wahr oder  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  sind wahr. Die Aussage „entweder  $\mathcal{A}$  oder  $\mathcal{B}$ “ besagt dagegen, daß  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  sich gegenseitig ausschließen und daß eine dieser beiden Aussagen wahr ist. Der Sinn der Aussagen „ $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ “ und „nicht  $\mathcal{A}$ “ ist klar.

## 2 Vorläufiges über die reellen Zahlen

### 2.1 Was sind und was sollen die Zahlen?

So lautet der Titel einer 1888 erschienenen Abhandlung von Richard DEDEKIND. Der Autor sagt dazu : „Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlen-Reich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellung von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlen-Reich beziehen“ [DEDEKIND]. Der hier angesprochene „rein logische Aufbau der Zahlen-Wissenschaft“ war kurz zuvor, nicht zuletzt durch Dedekind, geleistet worden und markiert den Schlußpunkt einer fast viertausendjährigen Entwicklung der zunehmenden Erweiterung und Präzisierung des Zahlbegriffs, vergleiche dazu [TROPFKE et alt.]. Dieser Aufbau besitzt allerdings einen hohen Abstraktionsgrad und setzt Konstruktionsprinzipien der Mengenlehre und Methoden der Algebra voraus, die dem Leser nicht zur Verfügung stehen. Wir können daher nur zur Kenntnis nehmen, daß eine logisch saubere Fundierung des Zahlbegriffs auf der Basis der Mengenlehre möglich ist.

**2.2** Wir stellen uns also auf den Standpunkt, daß uns die reellen Zahlen zur Verfügung stehen. Da wir sie auf „Raum und Zeit“ beziehen wollen, nehmen wir die geometrische Vorstellung zu Hilfe und denken uns die reellen Zahlen als Punkte auf der *Zahlengeraden*. Wegen der grundlegenden Bedeutung für die gesamte Mathematik müssen wir uns nur darüber verständigen, welche Eigenschaften wir den reellen Zahlen zuschreiben, und zwar im Hinblick auf das Rechnen und die Anordnung (Größenvergleich).

Es hat sich gezeigt, daß alle Eigenschaften von  $\mathbb{R}$  auf wenige Grundannahmen zurückgeführt werden können, die im folgenden durch einen Balken am Rand gekennzeichnet sind. Für das Ihnen allen aus dem Schulunterricht geläufige Rechnen sind dies die nachfolgend aufgeführten Grundgesetze (3.1 bis 3.3). Daß in diesen wirklich alle anderen Rechenregeln wie  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ ,  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$  usw. enthalten sind, wollen wir nicht nachprüfen, sondern den Algebraikern glauben. Anders steht es mit der Anordnung von  $\mathbb{R}$ , die im Schulunterricht nicht immer mit der notwendigen Ausführlichkeit und Strenge behandelt werden kann. Hier werden wir sehr gründlich vorgehen müssen, da Präzision und Sicherheit im Umgang mit Ungleichungen und den mit der *Vollständigkeit* (§2) zusammenhängenden Begriffsbildungen grundlegend für die gesamte Analysis sind.

**2.3** Für physikalische Messungen, Größenangaben und Rechnungen würden die rationalen Zahlen ausreichen. Für die Zwecke der Analysis und der Geometrie erweisen sie sich als „zu lückenhaft“. Erst ihre Ergänzung zu den reellen