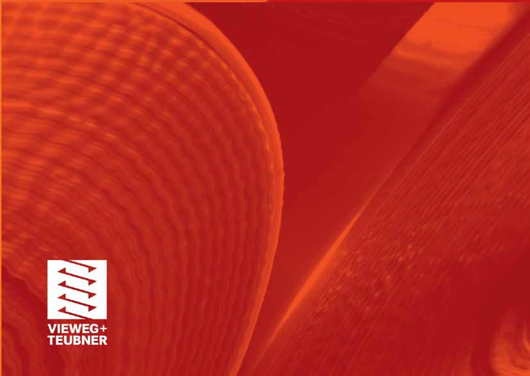
Kurt Magnus | Karl Popp | Walter Sextro

Schwingungen

Eine Einführung in die physikalischen Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen

8. Auflage

STUDIUM



VIEWEG+
TEUBNER

Kurt Magnus | Karl Popp | Walter Sextro

Schwingungen

Kurt Magnus | Karl Popp | Walter Sextro

Schwingungen

Eine Einführung in die physikalischen Grundlagen
und die theoretische Behandlung
von Schwingungsproblemen

8., überarbeitete Auflage

Mit 211 Abbildungen und
68 Aufgaben mit Lösungen

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

1. Auflage 1961
2. Auflage 1969
3. Auflage 1976
4. Auflage 1986
5. Auflage 1997
6. Auflage 2002
7. Auflage 2005
8., überarbeitete Auflage 2008

Lektorat: Harald Wollstadt

Der Vieweg+Teubner Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8351-0193-7

Vorwort

Das Vorwort zu dem vor mehr als dreißig Jahren veröffentlichten Buch „Schwingungen“, das als dritter Band der neu begründeten Reihe „Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik“ (LAMM-Reihe) erschienen war, begann mit der Feststellung:

Es besteht im deutschsprachigen Schrifttum kein Mangel an guten, ja ausgezeichneten Werken zur Schwingungslehre. Warum also soll das Bücherangebot auf diesem Gebiet noch vermehrt werden? Diese naheliegende Frage sei mit dem Hinweis beantwortet, dass für die vorliegende Zusammenstellung die Stoffauswahl und eine Beschränkung im Umfang entscheidend gewesen sind. Beides hängt eng miteinander zusammen. Es sollte etwa die Stoffmenge gebracht werden, die in einer einsemestrigen Vorlesung bewältigt werden kann; gleichzeitig aber sollte ein nicht zu einseitig begrenzter Überblick gegeben werden. Dieses Ziel verbot von vornherein jeden Gedanken an Vollständigkeit bezüglich der Ergebnisse der Schwingungslehre. Jedoch wurde eine gewisse Abrundung nicht nur hinsichtlich der Methoden, sondern auch bezüglich der wichtigsten Schwingungs-Erscheinungen angestrebt. Aus der Gliederung wird man erkennen, dass gegenüber anderen Büchern mit ähnlicher Zielsetzung gewisse Schwerpunktsverschiebungen vorgenommen wurden. Leitender Grundgedanke war eine Einteilung der Schwingungstypen nach dem Mechanismus ihrer Entstehung. Neben den autonomen Eigenschwingungen und selbsterregten Schwingungen wurden die heteronomen parametererregten und erzwungenen Schwingungen behandelt. In beide Bereiche übergreifend sind abschließend Koppelschwingungen dargestellt worden.

Das Buch erlebte vier Auflagen, von denen die zweite bis vierte durch Korrekturen, Unformulierungen und Ergänzungen nur wenig gegenüber der ersten Auflage verändert worden sind. Das Konzept des Buches hatte sich als für die Lehre geeignet erwiesen und ist angenommen worden - eine Tatsache, die auch durch Übersetzungen in drei Sprachen unterstrichen wird.

Mit dem Auslaufen der vierten Auflage wurde jedoch der Wunsch nach einer gründlicheren Überarbeitung laut. Dafür sollten nicht nur wichtige neuere Ergebnisse und Betrachtungen aufgenommen, sondern auch die inzwischen allgemein üblich gewordenen Formelsymbole verwendet werden. Außerdem sollten die weitreichenden Möglichkeiten berücksichtigt werden, die dank der Entwicklung der Computertechnik jetzt zur Verfügung stehen. Sie haben Art und Bedeutung der jeweils eingesetzten Berechnungsverfahren erheblich beeinflusst.

Natürlich sind im Laufe der vergangenen dreißig Jahre eine Anzahl neuer Werke zur Schwingungslehre erschienen, in denen aktuelle Entwicklungen berücksichtigt worden sind. Doch haben uns auch Anregungen aus dem Kreis der Leser davon überzeugt, dass das Konzept des Buches gerade auch für den fachübergreifenden Unterricht geeignet erscheint. Deshalb haben wir nun eine gründliche Überarbeitung und Ergänzung vorgenommen. Das freilich geschah jetzt durch ein Autoren-Duo, dessen beide Partner dank einer langjährigen Zusammenarbeit aufeinander eingestellt sind. Wir haben während der Überarbeitung stets engen Kontakt gehalten, sodass ein Auseinanderfallen der Neuauflage in zwei Teile - so hoffen wir - vermieden werden konnte. Auch legen wir Wert auf die Feststellung, dass beide Autoren die Verantwortung für alle Teile des Buches gemeinsam übernehmen.

Die Gliederung ist im wesentlichen beibehalten worden, doch sind zwei Kapitel, über „Kontinuumsschwingungen“ und „Chaotische Bewegungen“, neu hinzugekommen. Die Neubearbeitung und die Übernahme einiger Beispiele aus den alten in die neuen Kapitel führte zu einer strafferen Darstellung in den ersten Abschnitten. Hier konnte zugleich auf einige der zuvor ausführlich dargestellten Fälle verzichtet werden, ohne das angestrebte Ziel – Übersicht zu grundlegenden Fragen der Entstehung und Berechnung von Schwingungen – aus den Augen zu verlieren. Nach wie vor wird besonderer Wert auf die enge Verbindung von anschaulich physikalischen Überlegungen mit den mehr formal mathematischen Berechnungen gelegt; denn die Erfahrung zeigt immer wieder, dass das Transformieren einer physikalisch definierten Aufgabe in den mathematischen Bereich, und dann das Rücktransformieren, also die anschauliche Deutung mathematisch abgeleiteter Ergebnisse, den Studierenden Schwierigkeiten bereitet. Soweit es mit erträglichem Aufwand möglich war, haben wir exakte mathematische Verfahren bevorzugt. Doch kann auf die verschiedenartigen Näherungsverfahren natürlich nicht verzichtet werden. Hier kommt es vor allem darauf an, die Anwendungsmöglichkeiten und die Grenzen der Näherungen sorgfältig zu beachten. Auf Fehlerabschätzungen sowie auf Schwierigkeiten der mathematischen Begründung konnte dabei verständlicherweise nicht eingegangen werden.

Schwingungen treten als nützliche aber auch als störende Erscheinungen fast überall in Natur und Technik auf. Es kommt darauf an, sie zu verstehen, zu deuten oder auch in erwünschter Weise zu beeinflussen. Sowohl phänomenologisch wie auch methodisch offenbart sich hier eine enge Verwandtschaft der Begriffswelten von Schwingungslehre und Regelungstechnik. Daraus folgt, dass sich einige der in der Regelungstechnik allgemein üblichen Begriffe – wie Übergangsfunktion, Übertragungsverhalten, Frequenzgang und Ortskurven – auch bei Untersuchungen von Schwingern als zweckmäßig erwiesen haben. Zudem ist die für das Reglerverhalten weitgehend ausgebaute Stabilitätstheorie auch allgemein für schwingungsfähige Systeme von großem Nutzen. Auf eine methodische Begründung musste allerdings verzichtet werden. Die für das Verständnis so wichtigen Beispiele wurden, sofern sie als typisch anzusehen sind, ausführlich durchgerechnet, anderenfalls ist der Lösungsweg nur angedeutet. Der Charakter des Werkes als Lehrbuch soll durch Aufgaben unterstrichen werden, die den Kapiteln 1 bis 7 beigegeben wurden, und deren Lösungen am Ende des Buches zu finden sind. Wir meinen, dass ein Leser, der diese Aufgaben gelöst hat, etwas von den Grundgedanken der Schwingungslehre versteht. Zumindest wird es für ihn nicht schwierig sein, von der gewonnenen Erkenntnisebene aus sich weiter in Spezialgebiete der Schwingungslehre einzuarbeiten.

In das vorliegende Buch sind viele Anregungen von wissenschaftlichen Mitarbeitern und Hörern unserer Vorlesungen eingeflossen. Dafür sei an dieser Stelle gedankt. Hinweise und Verbesserungsvorschläge verdanken wir auch Buchbesprechungen und zahlreichen Zuschriften zu früheren Auflagen. Ein besonderer Dank gilt Frau A. Crohn für das Schreiben des Manuskripts, Herrn W. Pietsch für das Erstellen vieler Reinzeichnungen sowie den Herren Dipl.-Ing. N. Hinrichs und Dipl.-Math. M. Oestreich für numerische Berechnungen und die sorgfältige Durchsicht der Druckfahnen. Schließlich sind wir dem Verlag B. G. Teubner, insbesondere Herrn Dr. P. Spuhler, für die erwiesene Geduld und für die überaus erfreuliche Zusammenarbeit zu Dank verpflichtet.

München/Hannover, November 1996 Kurt Magnus/Karl Popp

Vorwort zur sechsten Auflage

Die rege Nachfrage hat nach kurzer Zeit zu einer Neuauflage, der inzwischen sechsten, geführt. Dabei konnten einige Druckfehler bereinigt, ein Hinweis auf Normen angefügt und eine Abbildung verbessert werden. Die bewährte Gliederung und die neu bearbeitete Fassung der fünften Auflage wurden ansonsten beibehalten. Neu sind die beigefügten Anzeigen, durch deren Aufnahme ein akzeptabler Preis für das Buch erreicht werden konnte. Den Sponsoren, durchweg Firmen, die wesentlich mit Schwingungen zu tun haben, sei an dieser Stelle für ihre Unterstützung gedankt.

München/Hannover, Januar 2002 Kurt Magnus/Karl Popp

Vorwort zur achten Auflage

Im Januar 2007 wurde ich vom Teubner Verlag durch Herrn Dr. Feuchte gefragt, ob ich Interesse hätte, die Betreuung des Buches Schwingungen zu übernehmen. Natürlich habe ich zugesagt und möchte mich hiermit über das damit entgegengebrachte Vertrauen bedanken. Frau Popp danke ich für die Übertragung der Rechte. Außerdem möchte ich mich bei meinen Vorgängern Prof. Magnus und meinem Doktorvater Prof. Popp für dieses großartige Werk bedanken. Es ist für mich eine große Ehre dieses Buch im Sinne meiner Vorgänger zu betreuen.

Der Teubner Verlag hat das Buch durch einen Satzbetrieb neu erfassen lassen. Diese elektronische Vorlage musste nochmals vollständig geprüft und korrigiert werden. Während des Prüfens habe ich das Buch bezüglich neuer Erkenntnisse überarbeitet. Selbstverständlich habe ich einige kleine Fehler im Text, in den Formeln und Zeichnungen ausgebessert. Insbesondere habe ich Kapitel 4.1.2 „Schwingungen in Kupplungsstangen-Antrieben“ überarbeitet und neue Bilder hinzugefügt.

Danken möchte ich dem Teubner Verlag für die Erstellung der elektronischen Vorlage des Buches und für die professionelle Betreuung durch Herrn Wollstadt und Frau Klabunde. Den Firmen danke ich für die Schaltung von Anzeigen in diesem Buch. Diese Einnahmen wurden u.a. genutzt, um den Kaufpreis des Buches zu senken. Meiner Mitarbeiterin Frau König und meinen Mitarbeitern Herrn Tieber und Herrn Hölzl möchte ich für die Unterstützung in der Überarbeitung danken.

Graz, November 2007 Walter Sextro

Inhalt

1 Grundbegriffe und Darstellungsmittel

1.1 Grundbegriffe

Als Schwingungen werden mehr oder weniger regelmäßig erfolgende zeitliche Schwankungen von Zustandsgrößen bezeichnet. Schwingungen können überall in der Natur und in allen Bereichen der Technik beobachtet werden. So schwankt die Tageshelligkeit in 24stündigem Rhythmus; es pendelt der Arbeitskolben in einem Motor ständig hin und her; schließlich ändert sich der Winkel, den ein in einer vertikalen Ebene schwingendes Schwerependel mit der Vertikalen bildet, in sich wiederholender Weise.

Der Zustand eines schwingenden Systems kann durch geeignet gewählte *Zustandsgrößen*, z.B. Winkel, Druck, Temperatur, elektrische Spannung, Geschwindigkeit o.ä. gekennzeichnet werden. Sei x eine derartige Zustandsgröße, so interessiert in der Schwingungslehre die zeitliche Veränderung $x = x(t)$. Eine besondere Rolle spielen Vorgänge, bei denen sich x periodisch ändert. Für sie gilt

$$x(t) = x(t + T). \tag{1.1}$$

Darin ist T ein fester Wert, der als Periode, als *Schwingungsdauer* oder als *Schwingungszeit* bezeichnet wird. Die Beziehung (1.1) sagt aus, dass die Zustandsgröße x zu je zwei Zeitpunkten, die um den Betrag T zeitlich auseinanderliegen, den gleichen Wert annimmt. Der reziproke Wert der Schwingungszeit T,

$$f = \frac{1}{T}, \tag{1.2}$$

ist die *Frequenz* der Schwingung, also die Zahl der Schwingungen in einer Sekunde. Die Einheit der Frequenz ist Hertz, abgekürzt Hz. Bei einer Schwingung von z.B. 6 Hz werden also 6 volle Perioden in einer Sekunde durchlaufen.

Für die rechnerische Behandlung der Schwingungen wird neben der durch (1.2) definierten Frequenz f noch die sogenannte *Kreisfrequenz* ω verwendet. Darunter wird die Zahl der Schwingungen in 2π Sekunden verstanden. Es gilt also

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \tag{1.3}$$

Schwingungszeit bzw. Frequenz bestimmen den Rhythmus einer Schwingung; ihre Stärke ist durch die *Amplitude* $\hat{x}$ gegeben. Darunter versteht man den halben Wert der gesamten *Schwingungsweite*, also des Bereiches, den die Zustandsgröße x im Verlaufe einer *Periode* durchläuft. Ist $x_{\max}$ der Maximalwert und $x_{\min}$ der Minimalwert von x während einer Periode, so gilt

$$\hat{x} = \frac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min}). \tag{1.4}$$

Der Wert der Zustandsgröße x schwankt bei periodischen Schwingungen um eine *Mittellage*, die durch

$$x_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}(x_{\max} + x_{\min}) \tag{1.5}$$

definiert werden kann. Bei symmetrischen Schwingungen entspricht diese Mittellage zugleich der Ruhelage oder *Gleichgewichtslage*.

Genügt die Funktion $x(t)$ nicht streng, sondern nur näherungsweise der Periodizitätsbedingung (1.1), so spricht man von *fast periodischen Schwingungen*. Es gilt dann

$$|x(t) - x(t + T)| < \varepsilon \tag{1.6}$$

mit einem vorgegebenen kleinen Wert ε.

1.2 Das Ausschlag-Zeit-Diagramm (x,t-Bild)

Zur anschaulichen Darstellung eines Schwingungsvorganges bedient man sich des x,t-Bildes, also einer graphischen Darstellung, bei der die Zeit t als Abszisse und der Ausschlag als Ordinate verwendet werden. Wie das in Fig. 1 gezeichnete Beispiel für eine periodische Schwingung zeigt, lassen sich aus dieser Darstellung unmittelbar die interessierenden Bestimmungsstücke der Schwingung, also die Schwingungszeit T, die Mittellage x_m und die Amplitude $\hat{x}$ ablesen.

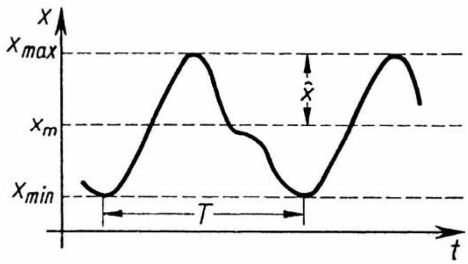


Fig. 1 x,t-Bild einer periodischen Schwingung

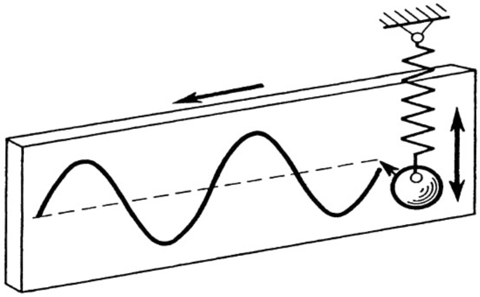


Fig. 2 Zur Entstehung eines x,t-Bildes

Die dominierende Stellung, die das x,t-Bild bei der Darstellung eines Schwingungsvorganges einnimmt, ist vor allem durch die Tatsache zu erklären, dass fast alle registrierenden *Schwingungsmessgeräte* (Schwingungsschreiber, Oszillographen) x,t-Bilder aufzeichnen. Stets wird bei diesen Geräten mittelbar oder unmittelbar die Schwingung auf einem mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Papier- bzw. Filmstreifen oder auf einer rotierenden Trommel aufgezeichnet – ähnlich, wie es in Fig. 2 für einen einfachen Fall skizziert ist.

Das x,t-Bild einer Schwingung lässt nicht nur die schon genannten Bestimmungsstücke leicht erkennen, es gibt darüber hinaus dem Fachmann einen manchmal sehr wichtigen Hinweis auf den allgemeinen Charakter der Schwingung, der sich in der Form des Kurvenzuges ausdrückt. In Fig. 3 sind einige typische Formen dargestellt; es sind dies

a) die gleichförmige Dreieckschwingung,
b) die Sägezahnschwingung (ungleichförmige Dreieckschwingung),
c) die *Trapezschwingung*,
d) die Rechteckschwingung,
e) die Sinusschwingung.

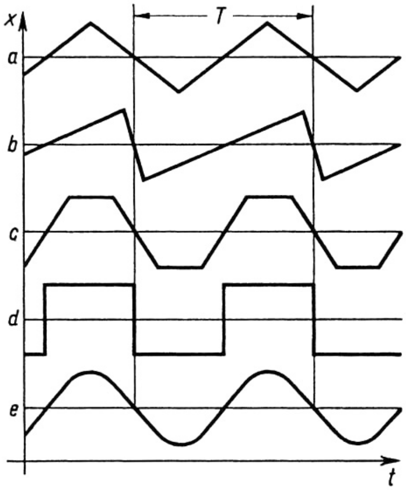


Fig. 3 *x,t*-Bilder

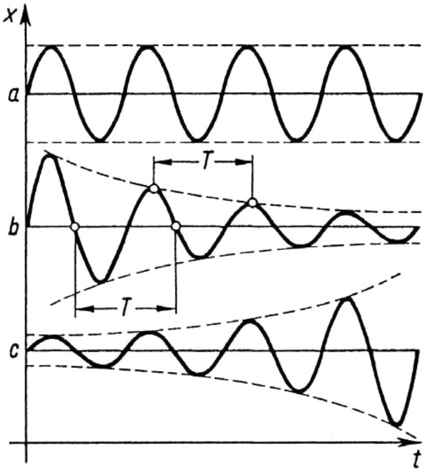


Fig. 4 Ungedämpfte, gedämpfte und angefachte Schwingungen

Von den genannten Schwingungstypen ist ohne Zweifel die letztgenannte die wichtigste; sie wird auch als *harmonische Schwingung* bezeichnet, wenn der Zeitverlauf durch eine Sinus- oder Cosinusfunktion beschrieben wird, deren Argument eine lineare Funktion der Zeit ist, vgl. DIN 1311-1. Viele in Natur und Technik vorkommende Schwingungen gehorchen mit sehr guter Annäherung der Sinusfunktion. Selbst in Fällen, bei denen eine Schwingung nicht sinusförmig verläuft, bietet sich die Sinusfunktion als bequemes Hilfsmittel zur näherungsweisen Beschreibung an.

Für eine Sinusschwingung gilt

$$x = x_m + \hat{x} \sin \omega t, \tag{1.7}$$

wobei für die Kreisfrequenz ω der Wert von (1.3) einzusetzen ist.

Die bisher betrachteten Schwingungen genügen der Periodizitätsbedingung (1.1), sodass sich die Kurvenstücke des *x,t*-Bildes für die einzelnen Schwingungsperioden vollkommen zur Deckung bringen lassen. Für jede Periode gelten die gleichen Werte x_{max} und x_{min}. Verbindet man einerseits die Punkte, an denen x den Wert x_{max}, andererseits die Punkte, an denen x den Wert x_{min} erreicht, so erhält man zwei horizontale Gerade, die die eigentliche Schwingungskurve einhüllen (Fig. 4a). Die Schwingungen sind *ungedämpft*. Wird der Abstand der beiden Hüllkurven mit wachsendem t kleiner, wie es Fig. 4b zeigt, dann spricht man von *gedämpften Schwingungen*. Gehen die beiden Hüllkurven mit wachsendem t auseinander, so nennt man die Schwingungen *aufschaukelnd oder angefacht* (Fig. 4c).

Obwohl für angefachte oder gedämpfte Schwingungen die Beziehung (1.1) nicht gilt, lässt sich dennoch eine Schwingungszeit T auch für diese definieren. Man verwendet hierzu beispielsweise den zeitlichen Abstand, in dem die Schwingungskurve eine der beiden Hüllkurven aufeinanderfolgend berührt.

Aber auch der Abstand zweier benachbarter in gleicher Richtung erfolgender Durchgänge der Schwingungskurve durch die Mittellage kann als Schwingungszeit T verwendet werden.

Die Mittellage ist in diesen Fällen einfach als Mittellinie zwischen den beiden Hüllkurven gegeben. Als Maß für die jetzt von der Zeit abhängige Amplitude kann der jeweilige Abstand der Hüllkurven von der Mittellage verwendet werden.

1.3 Vektorbild und komplexe Darstellung

Zur Darstellung von sinusförmigen Schwingungen kann das sehr anschauliche Vektorbild, auch Zeigerdiagramm genannt, verwendet werden. Bei seiner Konstruktion wird der enge Zusammenhang ausgenützt, der zwischen der Sinusschwingung und einer gleichförmigen Kreisbewegung besteht. Man erkennt diesen Zusammenhang unmittelbar an dem in Fig. 5 gezeichneten Kreuzschubkurbelgetriebe. Wird der Kurbelarm gleichförmig gedreht, dann vollführt jeder Punkt der Schubstange eine reine Sinusbewegung, für die $x = \hat{x} \sin \omega t$ gilt.

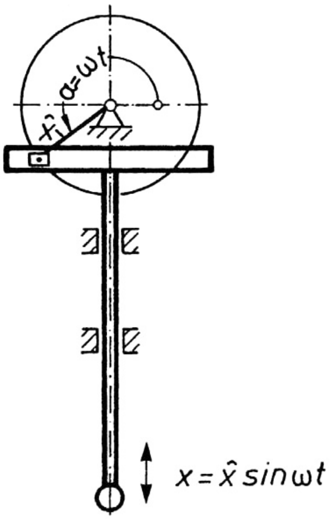


Fig. 5
Kreuzschubkurbelgetriebe und Sinusschwingung

Der Zusammenhang zwischen dem gleichförmig umlaufenden Vektor $\hat{x}$, dessen Betrag durch die Länge des Kurbelarmes gegeben ist, und dem x,t-Bild der resultierenden Schwingung der Schubstange geht aus der geometrischen Konstruktion von Fig. 6 hervor. Der Endpunkt des Vektors $\hat{x}$ bewegt sich auf einer Kreisbahn und nimmt dabei nacheinander die Lagen 1 bis 9 ein. Projiziert man diese Lagen in eine x,t-Ebene, bei der für die Abszisseneinteilung an Stelle der Zeit t auch der zu ihr proportionale Winkel α aufgetragen werden kann, so ergibt sich eine Sinuskurve. Der linke Teil von Fig. 6 ist das Vektorbild einer einfachen Sinusschwingung.

Für die Berechnung von harmonischen Schwingungen ist es häufig zweckmäßig, die Ebene des Vektorbildes als komplexe $\underline{z}$-Ebene mit $\underline{z} = x + \mathrm{i}y$ aufzufassen (komplexe Größen werden hier unterstrichen). Der rotierende Vektor der Länge $\hat{x}$, auch Zeiger genannt, wird dann dargestellt durch

$$\underline{z} = \hat{x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \hat{x}\,(\cos \omega t + \mathrm{i} \sin \omega t). \tag{1.8}$$