

Heidrun Matthäus | Wolf-Gert-Matthäus

# Mathematik für Ingenieur-Bachelor

Schritt für Schritt mit ausführlichen Lösungen

**STUDIUM**



**VIEWEG+  
TEUBNER**

Heidrun Matthäus | Wolf-Gert-Matthäus

Mathematik für Ingenieur-Bachelor

Heidrun Matthäus | Wolf-Gert-Matthäus

# Mathematik für Ingenieur-Bachelor

Schritt für Schritt mit ausführlichen Lösungen

STUDIUM



**VIEWEG+**  
**TEUBNER**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der  
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

1. Auflage 2011

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lektorat: Ulrich Sandten | Kerstin Hoffmann

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.

Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

[www.viewegteubner.de](http://www.viewegteubner.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg

Druck und buchbinderische Verarbeitung: STRAUSS GMBH, Mörlenbach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-1381-7

## Vorwort

Das Bildungswesen der Bundesrepublik ist in Bewegung. An den Gymnasien vieler Bundesländer verkürzt man die Schulzeit von 13 auf 12 Jahre. Mehrere Bundesländer führen ein Zentralabitur ein.

An den höchsten Bildungsstätten des Landes vollzieht sich eine der größten Umwälzungen des deutschen Hochschulwesens seit vielen Jahren: Gemäß den EU-Beschlüssen von Bologna erfolgt schrittweise die Umstellung des spezifisch deutschen Studiensystems auf die international üblichen Bildungsabschnitte Bachelor und Master. Nahezu alle Studiengänge werden dafür auf den Prüfstand gestellt.

Auch die technischen Fachrichtungen, die zum Ingenieur-Abschluss führen, sind in diese einschneidende Maßnahme einbezogen. Wenngleich es noch Überlegungen gibt, den klassischen deutschen Titel eines Diplom-Ingenieurs weiter verleihen zu wollen – für die beiden festgelegten Etappen „Bachelor“ und „Master“ werden auch die vielen Ingenieur-Fachbereiche an den Universitäten, technischen und Fachhochschulen ihre Ausbildung neu konzipieren müssen:

Der Ingenieur-Bachelor-Abschluss soll dabei bereits nach kurzen sechs oder sieben Semestern die Basisqualifikation zum Einstieg in die Praxis liefern. Oder er kann – bei gutem und sehr gutem Prädikat – sofort oder nach einigen Praxisjahren durch den wissenschaftlichen Master-Abschluss ergänzt werden.

Erste Erfahrungen liegen vor. Sie besagen jedoch, dass die Quote der Studienabbrecher in den Ingenieur-Bachelor-Studiengängen gegenüber früheren Studienformen nicht kleiner geworden ist. Nicht selten ist, vor allem an Fachhochschulen, der Grund darin zu suchen, dass das frühere, vierjährige FH-Diplom-Ingenieur-Studium zu formal auf drei Jahre komprimiert wurde, zu Lasten von Vorlesungs- und Übungszeiten in den Grundlagenfächern, insbesondere in der Mathematik. Die Schere zwischen mitgebrachtem mathematischen Wissen der Studienanfänger und den wachsenden Anforderungen im Grundstudium der Hochschulen öffnet sich weiter.

Sicher, es gibt sehr gute Bücher, die so genannte Brückenkurse anbieten, mit ihrer Hilfe kann der Schulstoff wiederholt und vertieft werden. Weiter gibt es viele ausgezeichnete, aber mathematisch überaus anspruchsvolle Hochschul-Lehrbücher, die aber ohne eine ausreichende Wissensbasis nur schwer zu verstehen sind.

Das vorliegende Lehrbuch soll die Lücke schließen zwischen diesen beiden Extremen. Es soll die Studienanfänger, vor allem in den technischen Fachrichtungen, an die Hand nehmen und aus der studienvorbereitenden Phase in die mathematisch anspruchsvolle Zeit der ersten Semester begleiten.

Nach dem neuen System werden für den erfolgreichen Abschluss eines Semesters der mathematischen Grundausbildung allgemein 5 bis 7 credit points vergeben. Rechnet man nach der international üblichen Formel, dass pro credit point ca. 30 Stunden erfolgreiche Beschäftigung mit dem vermittelten Lehrstoff in Lehrveranstaltung und Selbststudium angenommen werden, dann bekommt die eigenverantwortliche Beschäftigung mit dem spröden Stoff „Mathematik für Ingenieure“ eine wesentlich höhere Bedeutung als bisher.

Das vorliegende Lehrbuch trägt der neuen Situation in jeder Hinsicht Rechnung. Es enthält in neunzehn Kapiteln den grundsätzlichen mathematischen Lehrstoff, wie er wohl in jedem Ingenieur-Bachelor-Studiengang angeboten wird.

Da das Lehrbuch als begleitendes Buch zu den Vorlesungen und gleichzeitig als Hilfe für das Selbststudium gedacht ist, standen die Autoren immer wieder vor die Frage, wie die schwierige Balance zwischen strenger, aber nüchterner mathematischer Korrektheit und stärker populärem Erläutern und Erklären gehalten werden kann. Im Zweifelsfall fiel die Entscheidung meist zugunsten der Erklärung aus. Wir hoffen, dass dies auch im Sinne der Leser sein wird.

Angesichts des vorgegebenen Umfangs musste auch überlegt werden, welche mathematischen Themen zugunsten ausführlich vorgerechneter Beispiele gekürzt oder nur indirekt aufgenommen werden. So mussten einführende, systematisch aufbauende Kapitel über mathematische Logik, Mengenlehre und den Aufbau des Zahlensystems entfallen, wichtige Begriffe werden aber im Kontext dort erklärt, wo sie benötigt werden.

Nicht gekürzt wurde aber bei den einführenden Kapiteln, die das elementare und höhere „mathematische Handwerkszeug“ wiederholend zusammenstellen, vertiefen und ergänzen. Denn die Erfahrung beider Autoren, zusammen fast achtzig Jahre als Hochschul-Lehrende und als Hochschullehrer an diversen höheren und höchsten Bildungseinrichtungen tätig, weisen immer wieder aus, dass es nicht vordergründig intellektuelle Defizite oder das Unverständnis der Mathematik sind, die die Ingenieur-Studenten so oft an Mathematik-Klausuren scheitern lassen.

Sehr, sehr oft summieren sich nämlich die Kleinigkeiten auf – nicht gesetzte Klammern, vorschnell übersprungene Zwischenrechnungen, falsche Bruchrechnungen, falscher und flüchtiger Umgang mit Gleichungen und Ungleichungen, Kritiklosigkeit und das Fehlen der wichtigen Frage an sich selbst: „Kann das überhaupt stimmen?“.

Deshalb werden prinzipiell alle Beispielrechnungen so ausführlich vorgeführt, dass sie bis ins Detail nachvollziehbar sind. Kein Zwischenschritt wird ausgelassen, die beliebte Autoren-Floskel „man sieht leicht“, die jeden Leser zur Verzweiflung treibt, sollte sich in diesem Buch nicht finden lassen.

Einige Themengebiete können nur anreißend beleuchtet werden, das betrifft insbesondere die hochinteressante und wichtige Integralrechnung. Hier konnte nur das Wesentliche angedeutet werden, aber eine umfangreiche Liste weiterführender und vertiefender Literatur hilft auf dem Weg zu weiterführenden Studien.

Für den Dialog mit den Lesern wird auf der Internet-Seite [www.w-g-m.de](http://www.w-g-m.de) unter der gesonderten Rubrik **Leserservice** auf oft gestellte Fragen zum Buch geantwortet. Dort nehmen wir auch gern Hinweise, Anregungen und Kritiken entgegen.

Dem Vieweg+Teubner-Verlag in Wiesbaden danken wir, dass er unsere Anregung für dieses Buch so schnell aufgenommen hat und uns in jeder Weise anregend und hilfreich unterstützte.

Uenglingen, im Sommer 2011

Heidrun und Wolf-Gert Matthäus

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Elementares Handwerkszeug.....</b>	<b>17</b>
1.1	Klammersetzung.....	17
1.1.1	Punkt- vor Strichrechnung.....	17
1.1.2	Potenz- vor Punktrechnung.....	17
1.1.3	Klammern.....	17
1.2	Bruchrechnung.....	18
1.2.1	Grundsätzliches.....	18
1.2.2	Multiplikation und Division von Brüchen.....	19
1.2.3	Addition und Subtraktion von Brüchen.....	20
1.3	Größenverhältnisse bei Brüchen.....	21
1.4	Fakultät, Binomialkoeffizient, binomischer Satz.....	22
1.4.1	Fakultät.....	22
1.4.2	Binomialkoeffizient.....	23
1.4.3	Binomischer Satz.....	23
<b>2</b>	<b>Erweitertes Handwerkszeug.....</b>	<b>25</b>
2.1	Potenzen, Wurzeln, Logarithmen.....	25
2.1.1	Potenzen.....	25
2.1.2	Potenzgesetze.....	25
2.1.3	Wurzeln.....	26
2.1.4	Wurzelgesetze.....	27
2.1.5	Der Begriff des Logarithmus.....	28
2.1.6	Dualer, dekadischer und natürlicher Logarithmus.....	29
2.1.7	Logarithmengesetze.....	30
2.2	Gleichungen, Ungleichungen, Beträge.....	31
2.2.1	Allgemeines zu Gleichungen.....	31
2.2.2	Quadratische Gleichungen.....	33

2.2.3	Ungleichungen – Begriff und Lösungsmenge.....	34
2.2.4	Ungleichungen – Multiplikation mit bekannten Zahlen .....	35
2.2.5	Ungleichungen – Division durch Zahlen.....	36
2.2.6	Ungleichungen – Multiplikation/Division ohne Vorzeicheninformation .....	36
2.2.7	Beträge .....	40
2.2.8	Betragsgleichungen und -ungleichungen .....	41
2.3	Umgang mit dem Summenzeichen.....	42
2.3.1	Einfache Summen.....	42
2.3.2	Rechenregeln für einfache Summen .....	44
2.3.3	Doppelsummen .....	45
2.3.4	Weitere Rechenregeln für Doppelsummen .....	46
2.4	Sinus, Kosinus und so weiter .....	46
2.4.1	Begriffe am rechtwinkligen Dreieck .....	46
2.4.2	Sinus und Kosinus.....	47
2.4.3	Tangens und Kotangens.....	50
2.4.4	Der Einheitskreis .....	50
2.4.5	Grad- und Bogenmaß .....	55
2.4.6	Verwirrung bei Taschenrechner-Benutzung .....	57
2.4.7	Additionstheoreme .....	58
<b>3</b>	<b>Funktionen I: Begriff und Aufgabe der Analysis.....</b>	<b>59</b>
3.1	Funktionen.....	59
3.1.1	Begriff.....	59
3.1.2	Nutzen von Funktionen .....	61
3.1.3	Graph der Funktion .....	61
3.2	Beschreibungsformen von Funktionen.....	63
3.3	Aufgaben der Analysis .....	64
<b>4</b>	<b>Funktionen II: Rationale Funktionen .....</b>	<b>65</b>
4.1	Ganzrationale Funktionen: Polynome .....	65
4.1.1	Allgemeines.....	65
4.1.2	Berechnung von Funktionswerten von Polynomen.....	65



---

4.1.3	Graphen von Polynomen n-ten Grades, wenn n ungerade ist.....	66
4.1.4	Graphen von Polynomen n-ten Grades, wenn n gerade ist .....	68
4.1.5	Graphen von Polynomen zweiten Grades.....	69
4.1.6	Parabeln zeichnen .....	71
4.1.7	Graphen von Polynomen ersten Grades.....	74
4.1.8	Polynome nullten Grades und ihre Graphen .....	75
4.2	Gebrochen rationale Funktionen.....	75
4.2.1	Begriffe.....	75
4.2.2	Unendlichkeitsstellen und Lücken bei gebrochen rationalen Funktionen.....	76
4.2.3	Verhalten im Unendlichen.....	79
4.2.4	Vereinfachung echt gebrochen rationaler Funktionen.....	79
4.2.5	Partialbruchzerlegung .....	81
<b>5</b>	<b>Einschub: Komplexe Zahlen.....</b>	<b>83</b>
5.1	Ein Ausgangspunkt (einer von vielen).....	83
5.2	Komplexe Zahlen in arithmetischer Form .....	85
5.2.1	Real- und Imaginärteil, rein imaginäre und konjugiert komplexe Zahlen .....	85
5.2.2	Addition und Subtraktion komplexer Zahlen.....	86
5.2.3	Multiplikation komplexer Zahlen.....	86
5.2.4	Division komplexer Zahlen .....	87
5.2.5	Potenzieren einer komplexen Zahl .....	87
5.3	GAUSSsche Zahlenebene .....	87
5.4	Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen .....	88
5.5	Übergänge von einer Darstellungsform zur anderen Darstellungsform.....	90
5.5.1	Von der trigonometrischen zur arithmetischen Form.....	90
5.5.2	Von der arithmetischen zur trigonometrischen Form.....	92
5.6	Multiplikation und Division bei trigonometrischer Form .....	95
5.7	Potenzieren und Radizieren bei trigonometrischer Form.....	96
5.7.1	Potenzen .....	96
5.7.2	Wurzeln aus komplexen Zahlen .....	96
5.8	Die EULERSche Formel.....	98

<b>6</b>	<b>Funktionen III: Rationale bis trigonometrische Funktionen .....</b>	<b>99</b>
6.1	Echt gebrochen rationale Funktionen (Fortsetzung) .....	99
6.1.1	Lösung der Gleichung: Nennerpolynom gleich Null.....	99
6.1.2	Ansätze für die Partialbrüche.....	104
6.1.3	Bestimmung der Ansatzkoeffizienten .....	106
6.2	Unecht gebrochen rationale Funktionen .....	109
6.3	Exponentialfunktionen .....	111
6.3.1	Begriff.....	111
6.3.2	Graphen von Exponentialfunktionen.....	111
6.3.3	Zeichnen des Graphen.....	113
6.4	Hyperbelfunktionen.....	113
6.5	Logarithmusfunktionen.....	114
6.5.1	Begriff.....	114
6.5.2	Graphen von Logarithmusfunktionen .....	114
6.6	Trigonometrische Funktionen.....	115
6.6.1	Zugang zum Graph von $y=\sin x$ .....	115
6.6.2	Zugang zum Graph von $y=\cos x$ .....	118
6.6.3	Zugang zu den Graphen von $y=\tan x$ und $y=\cot x$ .....	119
6.6.4	Ergänzung: Tangens und Kotangens am Einheitskreis .....	121
<b>7</b>	<b>Funktionen IV: Verwandte Funktionen und ihre Graphen .....</b>	<b>123</b>
7.1	Begriffserklärung .....	123
7.2	Additionen und Subtraktionen.....	124
7.2.1	Addition und Subtraktion zur Funktion.....	124
7.2.2	Addition und Subtraktion zum Argument.....	125
7.3	Multiplikationen .....	126
7.3.1	Multiplikation der Funktion mit $(-1)$ .....	126
7.3.2	Multiplikation des Arguments mit $(-1)$ .....	126
7.4	Betragsbildungen.....	127
7.4.1	Betragsbildung im Argument.....	127
7.4.2	Von der Funktion zum Betrag der Funktion .....	128
7.5	Trigonometrische Funktionen und ihre Verwandten.....	131
7.5.1	Betragsbildungen .....	131

---

7.5.2	Waagerechte Verschiebungen mit und ohne Spiegelung .....	132
7.5.3	Waagerechte Streckungen und Stauchungen .....	134
<b>8</b>	<b>Funktionen V: Stetigkeit, Beschränktheit, Monotonie .....</b>	<b>135</b>
8.1	Stetigkeit .....	135
8.1.1	Definition .....	135
8.1.2	Konsequenzen von Stetigkeit und Unstetigkeit .....	136
8.1.3	Arten der Unstetigkeit .....	137
8.1.4	Suche nach Unstetigkeitsstellen .....	138
8.2	Beschränktheit .....	140
8.2.1	Definitionen .....	140
8.2.2	Stetigkeit und Beschränktheit .....	141
8.3	Monotonie .....	142
8.3.1	Definitionen .....	142
8.3.2	Rechnerische Bestimmung des Monotonieverhaltens .....	144
8.3.3	Stetigkeit und Monotonie .....	145
8.4	Mittelbare Funktionen: Funktionen von Funktionen .....	146
<b>9</b>	<b>Funktionen VI: Inverse Funktionen (Umkehrfunktionen) .....</b>	<b>151</b>
9.1	Fragestellung .....	151
9.2	Berechnung der Umkehrfunktion .....	153
9.3	Taschenrechner-Verwirrungen .....	155
9.3.1	Funktion ohne Taste .....	155
9.3.2	Tasten ohne Funktionen .....	156
<b>10</b>	<b>Kurvendiskussion: Erste Schritte .....</b>	<b>161</b>
10.1	Begriff und Aufgabenstellung .....	161
10.2	Definitionsbereich .....	162
10.2.1	Bestimmung des Definitionsbereiches .....	162
10.2.2	Beschreibung des Definitionsbereiches .....	163
10.2.3	Definitionsbereich als Lösung einer Ungleichung .....	163
10.2.4	Definitionsbereich als Lösung von Betragsgleichungen .....	165
10.2.5	Definitionsbereiche der Grundfunktionen .....	165
10.2.6	Definitionsbereiche verwandter Funktionen .....	166

10.3	Randuntersuchungen.....	168
10.3.1	Grundfunktionen .....	168
10.3.2	Beliebige Funktionen .....	169
10.3.3	Unbestimmte Ausdrücke .....	171
10.4	Wertebereich .....	172
10.4.1	Begriff und Bedeutung .....	172
10.4.2	Wertebereiche der Grundfunktionen .....	173
10.4.3	Wertebereiche verwandter Funktionen .....	174
10.4.4	Wertebereiche beliebiger Funktionen.....	177
10.5	Schnittpunkte mit den Achsen.....	177
10.5.1	Schnittpunkt mit der senkrechten Achse .....	177
10.5.2	Schnittpunkte mit der waagerechten Achse.....	178
10.6	Ausblick .....	180
<b>11</b>	<b>Differentialrechnung .....</b>	<b>181</b>
11.1	Vorbemerkung, Bilanz, Ausblick .....	181
11.2	Der erste Ableitungswert.....	181
11.2.1	Begriff und Bedeutung .....	181
11.2.2	Symbolik.....	182
11.3	Berechnung des ersten Ableitungswertes: Theorie.....	183
11.4	Berechnung des ersten Ableitungswertes: Praxis .....	184
11.4.1	Erster Ableitungswert und erste Ableitungsfunktion.....	184
11.4.2	Erste Ableitungsfunktion von wichtigen Grundfunktionen.....	184
11.4.3	Faktor- und Summenregel .....	186
11.4.4	Produktregel .....	187
11.4.5	Quotientenregel.....	188
11.5	Kettenregel.....	188
11.6	Logarithmisches Differenzieren .....	191
<b>12</b>	<b>Anwendungen der Ableitungsfunktionen .....</b>	<b>193</b>
12.1	Bedeutung des ersten Ableitungswertes für den Graphen.....	193
12.1.1	Anstieg der Tangente.....	193
12.1.2	Waagerechte Tangente .....	196
12.1.3	Existenz des ersten Ableitungswertes .....	197

---

12.2	Bedeutung der ersten Ableitungsfunktion für den Graphen .....	200
12.2.1	Grundsätzliches .....	200
12.2.2	Nullstellen der ersten Ableitung .....	202
12.3	Zweite Ableitungsfunktion .....	203
12.3.1	Begriff und Berechnung .....	203
12.3.2	Bedeutung für die Kurvendiskussion .....	203
12.3.3	Kriterien und hinreichende Bedingungen für relative Extrema .....	206
12.3.4	Lösung von Extremwertaufgaben .....	206
12.3.5	Höhere Ableitungsfunktionen .....	208
12.4	Ableitungsfunktionen nicht überall differenzierbarer Funktionen .....	208
12.5	Grenzwerte unbestimmter Ausdrücke .....	209
12.6	TAYLOR-Polynome .....	211
12.6.1	Einführung .....	211
12.6.2	TAYLOR-Polynome .....	213
12.6.3	Die TAYLOR-Formel .....	214
12.6.4	TAYLOR-Polynome der Sinusfunktion um $x_0=0$ .....	214
12.6.5	Eigenschaften der TAYLOR-Polynome .....	215
12.6.6	Schmiegeparabeln .....	215
12.6.7	Einige TAYLOR-Polynome bekannter Funktionen mit $x_0=0$ .....	216
12.6.8	TAYLOR-Polynome in der Gegenwart – Fragen und Antworten .....	217
12.6.9	Von komplizierten zu vereinfachten Formeln .....	218
<b>13</b>	<b>Elemente der Integralrechnung .....</b>	<b>221</b>
13.1	Das bestimmte Integral .....	221
13.2	Berechnung bestimmter Integrale: Theorie .....	223
13.3	Berechnung bestimmter Integrale: Praxis .....	228
13.3.1	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung .....	228
13.3.2	Stammfunktionen und das unbestimmte Integral .....	229
13.3.3	Erste Integrationsregeln .....	232
13.3.4	Substitution, Transformation der Grenzen .....	234
13.4	Integration gebrochen rationaler Funktionen .....	236
13.4.1	Aufgabenstellung .....	236
13.4.2	Vorbetrachtungen .....	237

13.4.3	Echt gebrochene Integranden .....	237
13.4.4	Unecht gebrochene Integranden .....	239
13.5	Hinweis auf numerische Methoden .....	240
<b>14</b>	<b>Bestimmtes Integral: Anwendungen .....</b>	<b>241</b>
14.1	Berechnung von Flächeninhalten .....	241
14.2	Berechnung von Bogenlängen ebener Kurven .....	243
14.3	Volumen und Mantelflächen von Rotationskörpern .....	246
14.4	Schwerpunkte von ebenen, homogen mit Masse belegten Flächenstücken .....	251
<b>15</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen .....</b>	<b>253</b>
15.1	Einführung .....	253
15.2	Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung .....	255
15.2.1	Konstante Koeffizienten und n-te Ordnung – homogener Fall .....	255
15.2.2	Konstante Koeffizienten und n-te Ordnung – inhomogener Fall .....	258
15.2.3	Partikuläre Lösung durch Ansatz .....	260
15.2.4	Nichtkonstante Koeffizienten und n-te Ordnung .....	262
15.3	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung .....	262
15.3.1	Konstante Koeffizienten und 1.Ordnung, homogener Fall .....	262
15.3.2	Konstante Koeffizienten und 1. Ordnung, inhomogener Fall .....	263
15.3.3	Nichtkonstante Koeffizienten und 1.Ordnung – homogener Fall .....	263
15.3.4	Nichtkonstante Koeffizienten und 1.Ordnung – inhomogener Fall .....	264
15.4	Nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung .....	264
15.4.1	Spezialfall $y'=f(x)$ .....	265
15.4.2	Trennbare Variable .....	265
15.5	Anfangs- und Randwertaufgaben .....	269
15.5.1	Aufgabenstellung .....	269
15.5.2	Beispiel mit formelmäßiger Lösung .....	269
<b>16</b>	<b>Matrizen und Determinanten .....</b>	<b>271</b>
16.1	Allgemeines .....	271
16.1.1	Der Matrixbegriff .....	271
16.1.2	Der Matrixbegriff in der Mathematik .....	271
16.2	Matrizen-Begriffe .....	272

---

16.2.1	Zeilen und Spalten, Format.....	272
16.2.2	Vektoren als spezielle Matrizen .....	272
16.2.3	Beziehungen zwischen Matrizen .....	273
16.2.4	Transponieren.....	273
16.3	Quadratische Matrizen .....	274
16.3.1	Diagonalen .....	274
16.3.2	Diagonal- und Einheitsmatrix .....	274
16.3.3	Symmetrie .....	275
16.4	Einfache Rechenregeln für Matrizen.....	275
16.4.1	Addition und Subtraktion, Nullmatrix .....	275
16.4.2	Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl .....	276
16.5	Matrizenmultiplikation.....	277
16.5.1	Herstellbarkeit von Matrizenprodukten .....	277
16.5.2	Vertauschbarkeit .....	279
16.5.3	Rechenregeln.....	279
16.5.4	Besonderheiten der Nullmatrix.....	280
16.5.5	Einselement der Matrizenmultiplikation .....	280
16.5.6	Division von Matrizen .....	281
16.6	Inverse Matrix .....	282
16.6.1	Fragestellung.....	282
16.6.2	Definition der inversen Matrix.....	282
16.6.3	Inverse von Diagonalmatrizen .....	284
16.6.4	Lösung einer Matrixgleichung mit quadratischer Matrix .....	284
16.6.5	Einzigkeit der Inversen.....	286
16.7	Der Determinantenbegriff .....	287
16.8	Bedeutung der Determinante.....	287
16.9	Berechnung von Determinanten.....	287
16.9.1	Zweireihige Determinanten.....	287
16.9.2	Dreireihige Determinanten – die Regel von SARRUS.....	288
16.9.3	n-reihige Determinanten – Hinweis auf den Entwicklungssatz .....	289
16.10	Determinantengesetze .....	289
16.11	Anwendungen .....	290
16.11.1	CRAMERsche Regel.....	290
16.11.2	Berechnung der Inversen von (2,2)-Matrizen.....	291