

Alessandro Giua  
Carla Seatzu

# Analisi dei sistemi dinamici



2a edizione

 Springer

UNITEXT

## **Analisi dei sistemi dinamici**

Alessandro Giua  
Carla Seatzu

# Analisi dei sistemi dinamici

2a edizione

 Springer

ALESSANDRO GIUA

Dipartimento di Ingegneria Elettrica ed Elettronica  
Università di Cagliari, Cagliari

CARLA SEATZU

Dipartimento di Ingegneria Elettrica ed Elettronica  
Università di Cagliari, Cagliari

ISBN 978-88-470-1483-1  
DOI 10.1007/978-88-470-1484-8

e-ISBN 978-88-470-1484-8

© Springer-Verlag Italia 2009

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore e la sua riproduzione è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla stessa. Le fotocopie per uso personale possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68. Le riproduzioni per uso non personale e/o oltre il limite del 15% potranno avvenire solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Via Corso di Porta Romana n. 108, Milano 20122, e-mail [segreteria@aidro.org](mailto:segreteria@aidro.org) e sito web [www.aidro.org](http://www.aidro.org).

Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge.

L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

*In copertina:* "Senza titolo", olio su tela, riprodotto per gentile concessione del maestro Antonio Mallus

*Layout copertina:* Simona Colombo, Milano

Impaginazione: PTP-Berlin, Protago T<sub>E</sub>X-Production GmbH, Germany ([www.ptp-berlin.eu](http://www.ptp-berlin.eu))

Stampa: Signum, Bollate (Mi)

*Stampato in Italia*

Springer-Verlag Italia S.r.l., Via Decembrio 28, I-20137 Milano

Springer-Verlag fa parte di Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

---

# Prefazione

## Prefazione alla prima edizione

Il nuovo ordinamento didattico ha reso necessario un rapido adeguamento dei programmi degli insegnamenti e dei manuali universitari. La principale novità introdotta dal nuovo ordinamento consiste nella frammentazione dei corsi monolitici della vecchia laurea in corsi più semplici, ripartiti su più anni o addirittura su più corsi di studio: *laurea di base* e *laurea specialistica*.

I classici testi che hanno formato la scuola dell'Automatica in Italia non sono adeguati alla laurea di base, non solo perché presuppongono una maturità matematica che gli studenti non possono ancora avere raggiunto, ma anche perché presentano i vari argomenti ad un livello di dettaglio molto superiore a quello che i tempi ristretti della laurea di base permettono di adottare.

D'altro canto, per lo studente che prosegue gli studi fino al conseguimento della laurea specialistica è utile disporre di un unico manuale inteso come guida ed approfondimento per lo studio di una disciplina. L'esperienza delle università anglosassoni, in cui da sempre esiste un percorso di base (*bachelor*) seguito da uno specialistico (*master*), ci ha insegnato l'utilità di manuali che possano essere usati a più livelli.

Il testo che presentiamo è dedicato all'*analisi dei sistemi a tempo continuo*. Esso è principalmente dedicato allo studio dei sistemi lineari, ma contiene anche qualche cenno ai sistemi non lineari. In esso sono trattati sia i *modelli ingresso-uscita* che i *modelli in variabili di stato*. Le tecniche di analisi presentate coprono sia lo studio nel *dominio del tempo*, che nel *dominio della variabile di Laplace* e nel *dominio della frequenza*. Benché si sia cercato di mostrare le interconnessioni tra tutte queste tecniche di analisi, i vari argomenti sono trattati in capitoli e sezioni a sé stanti: nelle nostre intenzioni ciò consente al testo di venir utilizzato quale sussidio didattico per un insegnamento che affronti solo una parte di tali argomenti.

Il testo copre i contenuti di:

- un insegnamento di *analisi dei sistemi* (o *teoria dei sistemi*) dedicato all'analisi dei sistemi lineari a tempo continuo per la laurea di base;
- uno o più insegnamenti di *complementi di analisi dei sistemi* per la laurea specialistica.

Ciò ha reso necessario una ristrutturazione della presentazione per consentire due diversi percorsi di lettura.

Per prima cosa, si è posta particolare attenzione nel presentare ogni argomento attraverso una serie di risultati che vengono dapprima chiaramente enunciati e poi dimostrati. Ad una prima lettura è sempre possibile saltare la dimostrazione, perché uno o più esempi chiariscono come il risultato debba essere applicato. Tuttavia, laddove il lettore voglia approfondire l'argomento, la dimostrazione costituisce un utile complemento: grande cura è stata posta nel presentare ogni dimostrazione in termini semplici e intuitivi, per quanto possibile.

In secondo luogo, si sono previste delle intere sezioni (e perfino un intero capitolo, il numero 12) dedicate ad argomenti di approfondimento. Tali sezioni sono indicate con un asterisco e possono essere saltate senza compromettere la comprensione del restante materiale.

A complemento del materiale didattico presentato nel testo sono disponibili sul sito <http://www.diee.unica.it/giua/ASD> una serie di esercizi svolti e di programmi MATLAB che riteniamo essere utili agli studenti.

Vorremmo ringraziare i colleghi Maria Maddalena Pala e Elio Usai che hanno letto le bozze di alcuni capitoli di questo libro, suggerendoci utili modifiche. Un ulteriore ringraziamento va anche a tutti gli studenti e i tutori del corso di Analisi dei Sistemi dell'Università di Cagliari, che negli anni 2000-2005 hanno letto e corretto una serie di appunti e dispense da cui poi questo testo ha preso corpo.

Infine un ringraziamento speciale va alle nostre famiglie che ci hanno sostenuto colmando quelle mancanze che il lavoro impegnativo svolto per realizzare questo libro ha inevitabilmente generato.

Cagliari, settembre 2005

## Prefazione alla seconda edizione

Nell'occasione della seconda edizione del nostro testo, a quattro anni di distanza dalla prima, vogliamo ringraziare tutti coloro che lo hanno usato e che, grazie ai loro commenti, ci hanno permesso di migliorarlo.

Gli studenti hanno accolto con favore questo manuale. Molti fra loro ci hanno segnalato la presenza di diversi errori di stampa e, rendendoci partecipi dei loro dubbi, ci hanno spinto a modificare alcune parti per rendere il materiale di più facile comprensione. In particolare, abbiamo parzialmente riscritto la trattazione

dei seguenti argomenti: *forma di Jordan e autovettori generalizzati, calcolo della matrice di trasferimento per sistemi a blocchi interconnessi, analisi delle proprietà filtranti mediante diagramma di Bode, criterio di Routh.*

Diversi colleghi hanno adottato o suggerito questo testo per i loro corsi. Alcuni, in particolare, ci hanno proposto di arricchirlo con nuovi argomenti, non trattati nella prima edizione. Tali argomenti sono: *stabilità del movimento e della traiettoria, osservatore di ordine ridotto, funzione descrittiva.*

Infine, siamo grati al collega Elio Usai per gli utili suggerimenti relativi alla presentazione dei nuovi argomenti e ai nostri dottorandi, Maria Paola Cabasino e Mauro Franceschelli, per l'aiuto prestatoci nella correzione delle bozze.

Speriamo che anche questa nuova edizione, come la prima, risulti uno strumento didattico utile a studenti e colleghi.

Cagliari, luglio 2009

*Alessandro Giua e Carla Seatzu*

---

# Indice

<b>Prefazione</b> .....	V
<b>1 Introduzione</b> .....	1
1.1 Automatica e sistemi .....	1
1.2 Problemi affrontati dall'Automatica .....	2
1.2.1 Modellazione .....	2
1.2.2 Identificazione .....	3
1.2.3 Analisi .....	3
1.2.4 Controllo .....	4
1.2.5 Ottimizzazione .....	4
1.2.6 Verifica .....	5
1.2.7 Diagnosi di guasto .....	5
1.3 Classificazione dei sistemi .....	5
1.3.1 Sistemi ad avanzamento temporale .....	6
1.3.2 Sistemi ad eventi discreti .....	7
1.3.3 Sistemi ibridi .....	9
<b>2 Sistemi, modelli e loro classificazione</b> .....	11
2.1 Descrizione di sistema .....	11
2.1.1 Descrizione ingresso-uscita .....	12
2.1.2 Descrizione in variabili di stato .....	14
2.2 Modello matematico di un sistema .....	16
2.2.1 Modello ingresso-uscita .....	16
2.2.2 Modello in variabili di stato .....	17
2.3 Formulazione del modello matematico .....	19
2.3.1 Sistemi idraulici .....	19
2.3.2 Sistemi elettrici .....	20
2.3.3 Sistemi meccanici .....	23
2.3.4 Sistemi termici .....	26
2.4 Proprietà dei sistemi .....	27
2.4.1 Sistemi dinamici o istantanei .....	28



2.4.2	Sistemi lineari o non lineari . . . . .	29
2.4.3	Sistemi stazionari o non stazionari . . . . .	32
2.4.4	Sistemi propri o impropri . . . . .	35
2.4.5	Sistemi a parametri concentrati o distribuiti . . . . .	37
2.4.6	Sistemi senza elementi di ritardo o con elementi di ritardo	38
	Esercizi . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Analisi nel dominio del tempo dei modelli ingresso-uscita . . . . .</b>	<b>45</b>
3.1	Modello ingresso-uscita e problema di analisi . . . . .	46
3.1.1	Problema fondamentale dell'analisi dei sistemi . . . . .	46
3.1.2	Soluzione in termini di evoluzione libera e evoluzione forzata . . . . .	47
3.2	Equazione omogenea e modi . . . . .	48
3.2.1	Radici complesse e coniugate . . . . .	51
3.3	L'evoluzione libera . . . . .	54
3.3.1	Radici complesse e coniugate . . . . .	56
3.3.2	Istante iniziale diverso da 0 . . . . .	58
3.4	Classificazione dei modi . . . . .	59
3.4.1	Modi aperiodici . . . . .	59
3.4.2	Modi pseudoperiodici . . . . .	63
3.5	La risposta impulsiva . . . . .	68
3.5.1	Struttura della risposta impulsiva . . . . .	69
3.5.2	Calcolo della risposta impulsiva [*] . . . . .	71
3.6	L'evoluzione forzata e l'integrale di Duhamel . . . . .	75
3.6.1	Integrale di Duhamel . . . . .	75
3.6.2	Scomposizione in evoluzione libera ed evoluzione forzata . .	78
3.6.3	Calcolo della risposta forzata mediante convoluzione . . . .	78
3.7	Altri regimi canonici [*] . . . . .	81
	Esercizi . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Analisi nel dominio del tempo delle rappresentazioni in variabili di stato . . . . .</b>	<b>87</b>
4.1	Rappresentazione in variabili di stato e problema di analisi . . . . .	87
4.2	La matrice di transizione dello stato . . . . .	88
4.2.1	Proprietà della matrice di transizione dello stato [*] . . . . .	89
4.2.2	Lo sviluppo di Sylvester . . . . .	90
4.3	Formula di Lagrange . . . . .	95
4.3.1	Evoluzione libera e evoluzione forzata . . . . .	96
4.3.2	Risposta impulsiva di una rappresentazione in VS . . . . .	98
4.4	Trasformazione di similitudine . . . . .	99
4.5	Diagonalizzazione . . . . .	103
4.5.1	Calcolo della matrice di transizione dello stato tramite diagonalizzazione . . . . .	107
4.5.2	Matrici con autovalori complessi [*] . . . . .	107
4.6	Forma di Jordan . . . . .	111

4.6.1	Determinazione di una base di autovettori generalizzati [*]	115
4.6.2	Matrice modale generalizzata [*]	121
4.6.3	Calcolo della matrice di transizione dello stato tramite forma di Jordan	123
4.7	Matrice di transizione dello stato e modi	126
4.7.1	Polinomio minimo e modi	126
4.7.2	Interpretazione fisica degli autovettori	128
	Esercizi	131
<b>5</b>	<b>La trasformata di Laplace</b>	<b>135</b>
5.1	Definizione di trasformata e antitrasformata di Laplace	135
5.1.1	Trasformata di Laplace	136
5.1.2	Antitrasformata di Laplace	137
5.1.3	Trasformata di segnali impulsivi	138
5.1.4	Calcolo della trasformata della funzione esponenziale	139
5.2	Proprietà fondamentali delle trasformate di Laplace	140
5.2.1	Proprietà di linearità	140
5.2.2	Teorema della derivata in $s$	141
5.2.3	Teorema della derivata nel tempo	143
5.2.4	Teorema dell'integrale nel tempo	146
5.2.5	Teorema della traslazione nel tempo	147
5.2.6	Teorema della traslazione in $s$	149
5.2.7	Teorema della convoluzione	150
5.2.8	Teorema del valore finale	151
5.2.9	Teorema del valore iniziale	153
5.3	Antitrasformazione delle funzioni razionali	154
5.3.1	Funzioni strettamente proprie con poli di molteplicità unitaria	155
5.3.2	Funzioni strettamente proprie con poli di molteplicità maggiore di uno	159
5.3.3	Funzioni non strettamente proprie	163
5.3.4	Antitrasformazione di funzioni con elementi di ritardo	164
5.3.5	Esistenza del valore finale di una antitrasformata	165
5.4	Risoluzione di equazioni differenziali mediante le trasformate di Laplace	166
	Esercizi	169
<b>6</b>	<b>Analisi nel dominio della variabile di Laplace</b>	<b>173</b>
6.1	Analisi dei modelli ingresso-uscita mediante trasformate di Laplace	173
6.1.1	Risposta libera	176
6.1.2	Risposta forzata	177
6.2	Analisi dei modelli in variabili di stato mediante trasformate di Laplace	178
6.2.1	La matrice risolvete	179
6.2.2	Esempio di calcolo dell'evoluzione libera e forzata	181

6.3	Funzione di trasferimento . . . . .	183
6.3.1	Definizione di funzione e matrice di trasferimento . . . . .	183
6.3.2	Funzione di trasferimento e risposta impulsiva . . . . .	184
6.3.3	Risposta impulsiva e modello ingresso-uscita . . . . .	185
6.3.4	Identificazione della funzione di trasferimento . . . . .	186
6.3.5	Funzione di trasferimento per modelli in variabile di stato . . . . .	186
6.3.6	Matrice di trasferimento . . . . .	187
6.3.7	Matrice di trasferimento e similitudine . . . . .	189
6.3.8	Passaggio da un modello in VS a un modello IU . . . . .	189
6.3.9	Sistemi con elementi di ritardo . . . . .	190
6.4	Forme fattorizzate della funzione di trasferimento . . . . .	191
6.4.1	Rappresentazione residui-poli . . . . .	191
6.4.2	Rappresentazione zeri-poli . . . . .	192
6.4.3	Rappresentazione di Bode . . . . .	194
6.5	Studio della risposta forzata mediante le trasformate di Laplace . . . . .	197
6.5.1	Risposta forzata ad ingressi canonici . . . . .	198
6.5.2	La risposta a regime permanente e la risposta transitoria . . . . .	201
6.5.3	Risposta indiciale . . . . .	203
	Esercizi . . . . .	211
<b>7</b>	<b>Realizzazione di modelli in variabili di stato e analisi dei sistemi interconnessi . . . . .</b>	<b>215</b>
7.1	Realizzazione di sistemi SISO . . . . .	215
7.1.1	Introduzione . . . . .	215
7.1.2	Caso $n = m = 0$ . . . . .	217
7.1.3	Caso $n > 0$ e $m = 0$ . . . . .	217
7.1.4	Caso $n \geq m > 0$ . . . . .	221
7.1.5	Passaggio da un insieme di condizioni iniziali sull'uscita ad uno stato iniziale . . . . .	227
7.2	Studio dei sistemi interconnessi . . . . .	229
7.2.1	Collegamenti elementari . . . . .	231
7.2.2	Determinazione della matrice di trasferimento per sistemi MIMO . . . . .	233
7.2.3	Algebra degli schemi a blocchi [*] . . . . .	236
	Esercizi . . . . .	240
<b>8</b>	<b>Analisi nel dominio della frequenza . . . . .</b>	<b>245</b>
8.1	Risposta armonica . . . . .	246
8.1.1	Risposta a regime ad un ingresso sinusoidale . . . . .	246
8.1.2	Definizione di risposta armonica . . . . .	248
8.1.3	Determinazione sperimentale della risposta armonica . . . . .	248
8.2	Risposta a segnali dotati di serie o trasformata di Fourier . . . . .	249
8.3	Diagramma di Bode . . . . .	250
8.3.1	Regole per il tracciamento del diagramma di Bode . . . . .	252
8.3.2	Esempi numerici . . . . .	267

8.4	Parametri caratteristici della risposta armonica e azioni filtranti ..	269
8.4.1	Parametri caratteristici .....	271
8.4.2	Azioni filtranti .....	274
	Esercizi .....	278
<b>9</b>	<b>Stabilità</b> .....	<b>281</b>
9.1	Stabilità BIBO .....	281
9.2	Stabilità secondo Lyapunov delle rappresentazioni in termini di variabili di stato .....	287
9.2.1	Stati di equilibrio .....	289
9.2.2	Definizioni di stabilità secondo Lyapunov .....	289
9.2.3	Movimento e traiettoria [*] .....	297
9.3	Stabilità secondo Lyapunov dei sistemi lineari e stazionari .....	302
9.3.1	Stati di equilibrio .....	302
9.3.2	Stabilità dei punti di equilibrio .....	304
9.3.3	Esempi di analisi della stabilità .....	307
9.3.4	Movimento e traiettoria [*] .....	309
9.3.5	Confronto tra stabilità BIBO e stabilità alla Lyapunov ..	311
9.4	Criterio di Routh .....	312
9.4.1	Criteri elementari per valutare il segno delle radici di un polinomio .....	313
9.4.2	Tabella e criterio di Routh .....	315
9.4.3	Casi singolari .....	317
9.4.4	Criterio di Routh in forma parametrica .....	323
	Esercizi .....	325
<b>10</b>	<b>Analisi dei sistemi in retroazione</b> .....	<b>329</b>
10.1	Controllo in retroazione .....	329
10.2	Luogo delle radici .....	333
10.2.1	Regole per il tracciamento del luogo .....	336
10.3	Criterio di Nyquist .....	348
10.3.1	Diagramma di Nyquist .....	348
10.3.2	Criterio di Nyquist .....	357
10.4	Luoghi per calcolare $W(j\omega)$ quando $G(j\omega)$ è assegnata graficamente .....	369
10.4.1	Carta di Nichols .....	369
10.4.2	Luoghi sul piano di Nyquist .....	375
	Esercizi .....	379
<b>11</b>	<b>Controllabilità e osservabilità</b> .....	<b>383</b>
11.1	Controllabilità .....	384
11.1.1	Verifica della controllabilità per rappresentazioni arbitrarie	385
11.1.2	Verifica della controllabilità per rappresentazioni diagonali	389
11.1.3	Controllabilità e similitudine .....	390
11.1.4	Forma canonica controllabile di Kalman [*] .....	392

11.2	Retroazione dello stato [*]	395
11.2.1	Ingresso scalare	397
11.2.2	Ingresso non scalare	399
11.3	Osservabilità	405
11.3.1	Verifica della osservabilità per rappresentazioni arbitrarie	406
11.3.2	Verifica della osservabilità per rappresentazioni diagonali	409
11.3.3	Osservabilità e similitudine	411
11.3.4	Forma canonica osservabile di Kalman [*]	412
11.4	Dualità tra controllabilità e osservabilità	415
11.5	Osservatore asintotico dello stato [*]	416
11.5.1	Osservatore di Luenberger	417
11.5.2	Osservatore di ordine ridotto	421
11.6	Retroazione dello stato in presenza di un osservatore [*]	427
11.7	Controllabilità, osservabilità e relazione ingresso-uscita	430
11.7.1	Forma canonica di Kalman	430
11.7.2	Relazione ingresso-uscita	431
11.8	Raggiungibilità e ricostruibilità [*]	433
11.8.1	Controllabilità e raggiungibilità	433
11.8.2	Osservabilità e ricostruibilità	434
	Esercizi	435
<b>12</b>	<b>Analisi dei sistemi non lineari</b>	<b>437</b>
12.1	Cause ed effetti tipici di non linearità	437
12.1.1	Cause tipiche di non linearità	437
12.1.2	Effetti tipici delle non linearità	439
12.2	Studio della stabilità mediante i criteri di Lyapunov	446
12.2.1	Studio della stabilità mediante funzione di Lyapunov	446
12.2.2	Linearizzazione intorno ad uno stato di equilibrio e stabilità	451
12.3	Analisi mediante funzione descrittiva [*]	457
12.3.1	Funzione descrittiva	458
12.3.2	Analisi mediante funzione descrittiva	468
	Esercizi	474
	<b>Appendici</b>	<b>477</b>
	<b>Appendice A Richiami ai numeri complessi</b>	<b>479</b>
A.1	Definizioni elementari	479
A.2	I numeri complessi	479
A.2.1	Rappresentazione cartesiana	479
A.2.2	Esponenziale immaginario	480
A.2.3	Rappresentazione polare	481
A.3	Formule di Eulero	483

<b>Appendice B Segnali e distribuzioni</b> .....	485
B.1 Segnali canonici .....	485
B.1.1 Il gradino unitario .....	485
B.1.2 Le funzioni a rampa e la rampa esponenziale .....	486
B.1.3 L'impulso .....	487
B.1.4 Le derivate dell'impulso .....	489
B.1.5 Famiglia dei segnali canonici .....	489
B.2 Calcolo delle derivate di una funzione discontinua .....	490
B.3 Integrale di convoluzione .....	492
B.4 Convoluzione con segnali canonici .....	495
<b>Appendice C Elementi di algebra lineare</b> .....	497
C.1 Matrici e vettori .....	497
C.2 Operatori matriciali .....	500
C.2.1 Trasposizione .....	500
C.2.2 Somma e differenza .....	501
C.2.3 Prodotto di una matrice per uno scalare .....	501
C.2.4 Prodotto matriciale .....	502
C.2.5 Potenza di una matrice .....	504
C.2.6 L'esponenziale di una matrice .....	505
C.3 Determinante .....	506
C.4 Rango e nullità di una matrice .....	509
C.5 Sistemi di equazioni lineari .....	511
C.6 Inversa .....	513
C.7 Autovalori e autovettori .....	517
<b>Appendice D Matrici in forma compagna e forme canoniche</b> .....	523
D.1 Matrici in forma compagna .....	523
D.1.1 Polinomio caratteristico .....	524
D.2 Forme canoniche delle rappresentazioni in variabili di stato .....	525
D.2.1 Forma canonica di controllo .....	526
D.2.2 Forma canonica di osservazione .....	531
D.3 Autovettori di una matrice in forma compagna .....	534
D.3.1 Autovettori .....	534
D.3.2 Autovettori generalizzati [*] .....	535
D.3.3 Matrici in forma compagna trasposta .....	537
<b>Appendice E Lineare indipendenza di funzioni del tempo</b> .....	539
<b>Appendice F Serie e integrale di Fourier</b> .....	543
F.1 Serie di Fourier .....	543
F.1.1 Forma esponenziale .....	543
F.1.2 Forma trigonometrica .....	544
F.2 Integrale e trasformata di Fourier .....	547
F.2.1 Forma esponenziale .....	547

F.2.2	Forma trigonometrica .....	549
F.3	Relazione tra trasformata di Fourier e di Laplace .....	550
<b>Appendice G    Teorema di Cayley-Hamilton e calcolo di funzioni</b>		
	<b>matriciali</b> .....	553
G.1	Teorema di Cayley-Hamilton .....	553
G.2	Teorema di Cayley-Hamilton e polinomio minimo .....	554
G.3	Funzioni analitiche di una matrice .....	555
<b>Bibliografia</b>	.....	561
<b>Indice analitico</b>	.....	563