LEHRBUCH

Günter Aumann

Kreisgeometrie

Eine elementare Einführung

Springer Spektrum

LEHRBUCH

Günter Aumann

Kreisgeometrie

Eine elementare Einführung

Springer Spektrum

Springer-Lehrbuch

Günter Aumann

Kreisgeometrie

Eine elementare Einführung

Springer Spektrum

Günter Aumann
Bretten, Deutschland

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-662-45305-6 ISBN 978-3-662-45306-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-45306-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Vorwort

Für Platon war die – später euklidisch genannte – Geometrie ein unverzichtbarer Bestandteil der Bildung. Diese Stellung behauptete sie bis in das erste Viertel des 20. Jahrhunderts. Die renommiertesten Mathematiker widmeten sich ihr und bereicherten sie um neue, oft überraschende Erkenntnisse. Später erhielt diese Geometrie das Attribut *elementar*. Das meinte allerdings nicht, dass sie als grundlegend für die Mathematik betrachtet wurde (wie dies für die Elementarteilchen in der Chemie oder Physik zutrifft); sie galt vielmehr als trivial und damit keiner weiteren Betrachtung wert. Sie wurde in die Schulen und (im günstigsten Fall) die Ausbildung der Lehrer abgeschoben. Inzwischen ist sie auch dort nurmehr rudimentär vertreten.

Andererseits gab es noch nie so viele Geometrien wie heute. Dies ist zum einen der Physik geschuldet, für deren mathematische Fundierung die euklidische Geometrie längst nicht mehr ausreicht. Zum anderen tragen aber viele Teilgebiete der Mathematik die Geometrie im Namen, deren geometrischer Gehalt für den Laien nicht und für den Fachmann kaum erkennbar ist. Dass dort nicht mehr im eigentlichen Sinn geometrisch argumentiert wird, verwundert nicht. Doch auch in der Elementargeometrie geschieht dies immer weniger. Während Felix Klein noch Ende des 19. Jahrhunderts in seinem berühmten „Erlanger Programm“ den eigenständigen Wert der geometrischen Argumentation und der damit verbundenen räumlichen Anschauung hervorhob, wurde im Laufe des 20. Jahrhunderts geometrische Beweisführung immer mehr von algebraischer oder analytischer verdrängt. In den sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts war es dann sogar möglich, Bücher über *Elementar*geometrie zu schreiben, die keine einzige Abbildung enthielten. Während früher Generationen von Geometern voller Stolz ihren Hörern in eindrucksvollen Tafelbildern den ästhetischen Wert gelungener geometrischer Illustrationen vor Augen führten, kokettieren heute „Geometer“ damit, keine korrekte Skizze zustande zu bringen.

Der Wert eines rein abstrakten Vorgehens soll keineswegs geleugnet werden. Es ist für die Weiterentwicklung der Mathematik unverzichtbar. Bedenklich ist allerdings die von seinen Vertretern beanspruchte Ausschließlichkeit. Natürlich empfinden Mathematiker auch einen eleganten abstrakten Beweis als „schön“. Doch lässt sich diese Schönheit – im Unterschied zur Schönheit einer geometrischen Figur – Nichtmathematikern nur schwer vermitteln. Indem sie elementargeometrische Argumentation durch analytische und algebraische ersetzten, verschlossen die Mathematiker Außenstehenden jenes Teilgebiet, das den einladendsten Zugang zu ihrem Reich bietet. Leichtfertig wird dadurch eine Chance vertan, Interesse an dieser interessanten Wissenschaft zu wecken und ihr kaltes Image durch wärmere Töne anziehender zu gestalten.

Das vorliegende Buch versucht, hier ein Stück weit gegen den Strom zu schwimmen, indem es die geometrische Argumentation in den Mittelpunkt stellt. Dies zeigen nicht zuletzt die mehr als 250 Abbildungen, die die Beweise begleiten. Dabei geht es nicht darum, akribisch alle möglichen Fälle abzuarbeiten. Es sollen vielmehr die Beweisideen deutlich und insbesondere deren geometrischer Kern transparent werden. Um dies zu erreichen, werden die mathematischen Fachbegriffe auf ein Minimum beschränkt und neben den Resultaten, die im Buch hergeleitet werden, nur wenige Sätze der Schulgeometrie verwendet, die in jeder Formelsammlung zu finden sind. Auch wird nur selten intensiver algebraisch argumentiert. Meist geht es dabei um weiterführende Resultate, deren Beweis beim ersten Lesen übersprungen werden kann.

Die Kreisgeometrie ist das ideale Gebiet, Interessierten den Reichtum der Geometrie zu erschließen. Kreise sind neben Dreiecken die vertrautesten geometrischen Objekte. Während jedoch die Dreiecksgeometrie (wegen der Erinnerungen an die Schulzeit?) den Ruf hat, langweilig zu sein, bietet die Kreisgeometrie ein großes Feld geometrisch interessanter, vielfach aber kaum bekannter Resultate. Diese dem Leser nahezubringen, ist das Ziel dieses Buches.

Den Auftakt bildet ein Kapitel, das zeigt, dass sich allein schon mit dem Satz des Pythagoras – dem wohl bekanntesten aller geometrischen Sätze – eine Vielzahl kreisgeometrischer Aussagen beweisen lässt, deren Bedeutung weit über die Geometrie hinausreicht.

Im Kap. 2 werden die aus der Schule bekannten, über 2000 Jahre alten klassischen Sätze der Kreisgeometrie nochmals vorgestellt und bewiesen. In der Schulgeometrie bilden sie meist den Schlusspunkt geometrischer Betrachtungen, hier dienen sie als Ausgangspunkt für weite Wanderungen durch das Gebiet der Kreisgeometrie.

Einen kräftigen Schub erfuhr die Kreisgeometrie im 19. Jahrhundert, als die Geometer – etwa der geniale Autodidakt Jacob Steiner – neue Werkzeuge entwickelten. Sie erlaubten es, das Areal der Kreisgeometrie weiter zu erschließen und neue Wege zu beeindruckenden Aussichtspunkten und bisher unerreichbaren Gipfeln anzulegen. Die damals geschaffenen Instrumente stehen im Mittelpunkt der Kap. 3 und 4.

Die Mächtigkeit dieser Werkzeuge zeigt sich in den weiteren Kapiteln, die ein breites Spektrum kreisgeometrischer Themen behandeln. Vielen berühmten Kreisen wird der Leser dabei begegnen, viele prominente Sätze kennenlernen.

G. Aumann

Inhaltsverzeichnis

1 Ouvertüre: Kreise in gotischem Maßwerk

Wir beginnen unseren Spaziergang durch die Kreisgeometrie mit der Konstruktion einiger interessanter und in der Kunst vielfach auftretender Figuren, die sich aus Kreisbögen zusammensetzen. Die theoretischen Grundlagen, die wir hierfür benötigen, sind sehr gering: Es genügt der Satz des Pythagoras. Zuvor werfen wir einen kurzen Blick auf die in diesem Buch verwendeten Bezeichnungen (siehe Abb. 1.1).

Die *Gerade* g durch die Punkte A und B bezeichnen wir mit AB, die *Strecke* mit den Endpunkten A und B mit $\overline{AB}$. Jede Gerade ist die *Trägergerade* der auf ihr liegenden Strecken. Punkte $P, Q, R \ldots$ auf einer Geraden heißen *kollinear*. Jeder Punkt einer Geraden AB teilt diese in zwei, in diesem Punkt beginnende *Halbgeraden*. Die in A beginnende Halbgerade durch B bezeichnen wir mit AB^+.

Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ ist der *Abstand* der Punkte A und B, den wir als $d(A, B)$ schreiben. Da Missverständnisse nicht zu befürchten sind, werden wir bisweilen auch vom Verhältnis zweier Strecken sprechen, wenn wir das Verhältnis ihrer Längen meinen. Der

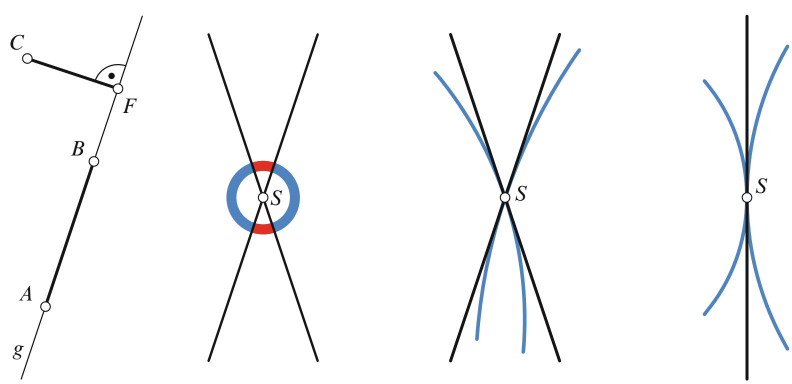

Abb. 1.1 Grundbegriffe

G. Aumann, *Kreisgeometrie*, Springer-Lehrbuch, DOI 10.1007/978-3-662-45306-3_1

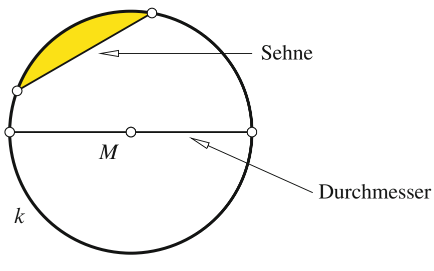

Abb. 1.2 Begriffe am Kreis

Abstand $d(C, g)$ eines Punktes C von einer Geraden g ist die Länge der Strecke $\overline{CF}$, wobei F der Fußpunkt des von C auf g gefällten Lotes ist.

Zwei Halbgeraden mit dem gemeinsamen Anfangspunkt S bilden einen *Winkel* mit dem *Scheitel* S. Zwei Geraden durch S erzeugen somit vier Winkel, von denen je zwei gegenüberliegende (als Scheitelwinkel) gleich groß sind und zwei benachbarte sich zu $180°$ ergänzen. Kennt man also *einen* Winkel, so kennt man alle. Wir sprechen daher kurz vom *Schnittwinkel* zweier Geraden. Handelt es sich bei den Geraden um die Tangenten zweier Kurven in einem gemeinsamen Punkt S, so ist dies auch der Schnittwinkel dieser Kurven. Beträgt er $0°$ (oder $180°$), so *berühren* sich die Kurven.

In einer Ebene ist ein *Kreis* k durch seinen *Mittelpunkt* M und seinen *Radius* r festgelegt als Ort aller Punkte der Ebene, die von M den Abstand r haben. Die Verbindungsstrecke zweier Kreispunkte heißt *Sehne* des Kreises, ist sie doppelt so lang wie ein Radius, auch *Durchmesser* (siehe Abb. 1.2). Besitzt ein Kreis den Durchmesser $\overline{AB}$, so sprechen wir kurz vom Kreis über $\overline{AB}$. Jede Sehne teilt die Kreisfläche in zwei *Segmente*.

Einen durch zwei Radien $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ ausgeschnittenen *Kreisbogen* und dessen Länge bezeichnen wir mit $\widehat{PQ}$ (siehe Abb. 1.2). Es gibt davon zwei, die wir zueinander *komplementär* nennen. Die beiden Halbgeraden MP^+ und MQ^+ schließen den zugehörigen *Mittelpunktswinkel* oder *Zentriwinkel* ein. Wählen wir einen (von P und Q verschiedenen) Punkt A auf dem zu einem Bogen $\widehat{PQ}$ komplementären Bogen, so liefern die Halbgeraden AP^+ und AQ^+ einen *Umfangswinkel* oder *Peripheriewinkel* über dem Bogen $\widehat{PQ}$. Wenn klar ist, welcher Bogen mit den Endpunkten P, Q gemeint ist, sprechen wir bisweilen auch vom Umfangswinkel über der Sehne $\overline{PQ}$.

Schließlich nennen wir zwei Kreise mit gleichem Mittelpunkt *konzentrisch*. Die Gerade durch die Mittelpunkte zweier nicht konzentrischer Kreise ist deren *Zentrale*.

1.1 Der bekannteste Kreis

Der wohl bekannteste Kreis ist nach Thales benannt, der etwa von 625 bis 547 v. Chr. in Milet, einer Stadt an der Westküste Kleinasiens, lebte. In seiner weitestgehenden Formulierung lautet der entsprechende Satz wie folgt.

Satz 1.1 (Satz des Thales) *Das Dreieck ABC besitzt genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn der Punkt C auf dem (Thales-)Kreis über $\overline{AB}$ liegt.*

Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, ergeben in einem rechtwinkligen Dreieck die nicht rechten Winkel zusammen 90°. Hat also das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel, so kann man diesen durch eine Strecke $\overline{CD}$ so teilen, dass im Dreieck ADC zweimal der Winkel α und im Dreieck BCD zweimal der Winkel β auftritt (siehe Abb. 1.3a). Da ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln gleichschenklig ist, folgt hieraus

$$d(A, D) = d(C, D) = d(B, D)\,,$$

weshalb die Punkte A, B, C auf einem Kreis mit Mittelpunkt D liegen.

Liegt umgekehrt C auf dem Kreis über $\overline{AB}$, so gilt für den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$

$$d(A, M) = d(B, M) = d(C, M)$$

(siehe Abb. 1.3b). Also sind die Dreiecke MCA und MBC gleichschenklig, weshalb ihre Basiswinkel jeweils gleich groß sind. Somit gilt

$$\alpha + \beta = 180^\circ : 2 = 90^\circ\,.$$

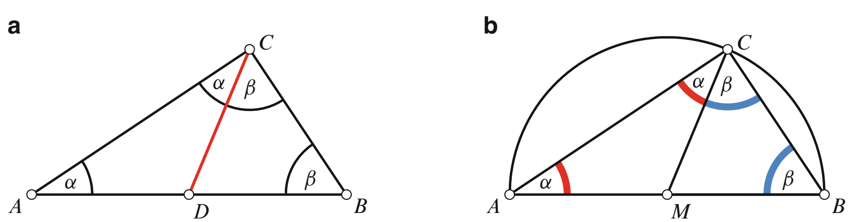

Abb. 1.3 Der Satz des Thales

1.2 Der gotische Spitzbogen

Mit der Gotik löste der Spitzbogen den romanischen Rundbogen ab. Er ermöglichte den Bau höherer Kirchen, deren Lichtarchitektur Gott, die Quelle allen Lichts, erfahrbar machen sollte. Die farbigen Fenster dieser Kirchen faszinieren den Betrachter bis heute. Als erstes Bauwerk der Hochgotik gilt die Kathedrale von Chartres (siehe Abb. 1.4). Begonnen wurde mit ihrem Bau im Jahre 1194, nachdem ein Stadtbrand den romanischen Vorgängerbau zerstört hatte. Offiziell eingeweiht wurde die Kirche erst 1260. Die Gesamtfläche ihrer Fenster beträgt rund 5000 m^2, was etwa der Fläche eines Fußballfeldes entspricht.

Ein gotisches Kirchenfenster besteht aus einem Rechteck, das nach oben durch die so genannte *Kämpferlinie* begrenzt ist (rot in Abb. 1.5). Ihre Endpunkte heißen die *Kämpferpunkte*. Darüber erhebt sich das von zwei Kreisbögen (mit gleichem Radius) begrenzte Bogenfeld. Wir betrachten im Folgenden ausschließlich den Fall, der in Abb. 1.5a zu sehen ist. Hier fallen die Mittelpunkte der Kreisbögen mit den Kämpferpunkten zusammen. Diese Konstruktion der Spitzbögen kann man variieren, indem man die Mittelpunkte der Kreise nach außen (überhöhter Spitzbogen; siehe Abb. 1.5b) oder innen (gedrückter Spitzbogen; siehe Abb. 1.5c) verschiebt.

Das Bogenfeld ist meist reich mit Maßwerk, also durch die filigrane Arbeit von Steinmetzen, verziert (siehe Abb. 1.6). Noch aufwendiger waren diese Verzierungen in den

Abb. 1.4 Die Kathedrale von Chartres (Olvr / Wikimedia Commons)

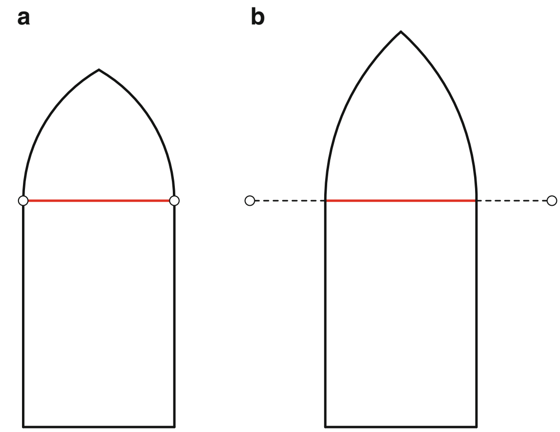

Abb. 1.5 Kirchenfenster

Abb. 1.6 Bogenfeld in Fontfroide (bei Narbonne)

prächtigen runden, im Durchmesser bisweilen mehr als 10 Meter großen Fenstern über dem Hauptportal oder in den Fassaden des Querschiffes, die als Fensterrosen oder Rosetten bekannt sind. Die Abb. 1.7 zeigt ein reich verziertes Kirchenfenster mit einer Randkurve, die aus dem Rahmen fällt. Im Kap. 10 werden wir auf diese Randkurve zurückkommen.

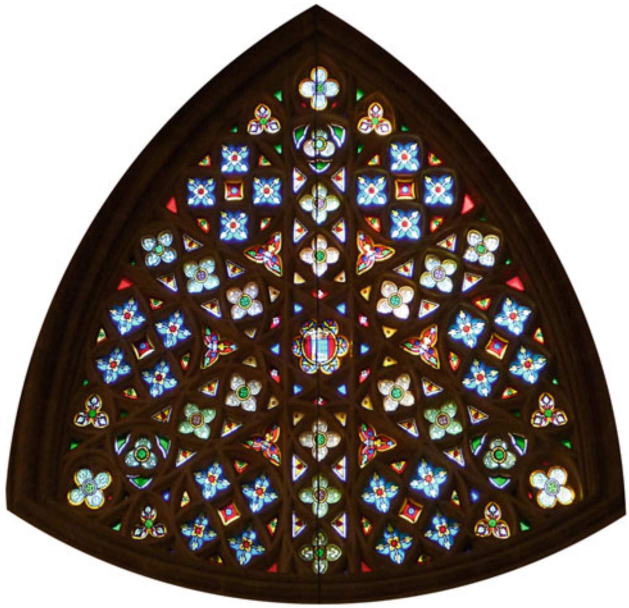

Abb. 1.7 Fenster in der Kathedrale von Bilbao

Wir sehen, dass sich das Maßwerk aus verschiedenen geometrischen Formen zusammensetzt, bei denen der Kreis eine wichtige Rolle spielt. Wie sich solche Formen konstruieren und ihre Maße berechnen lassen, sehen wir uns in diesem Kapitel an einigen Beispielen an.

Zunächst betrachten wir Maßwerk in einem Spitzbogen. Dabei gehen wir stets davon aus, dass dieser Spitzbogen von der Kämpferlinie $\overline{AB}$ der Länge R und von zwei Kreisbögen mit den Mittelpunkten A und B begrenzt wird.

Als erstes füllen wir den Spitzbogen mit einem Kreis (siehe Abb. 1.8a). Wie lassen sich der Mittelpunkt M und der Radius r dieses Kreises bestimmen?

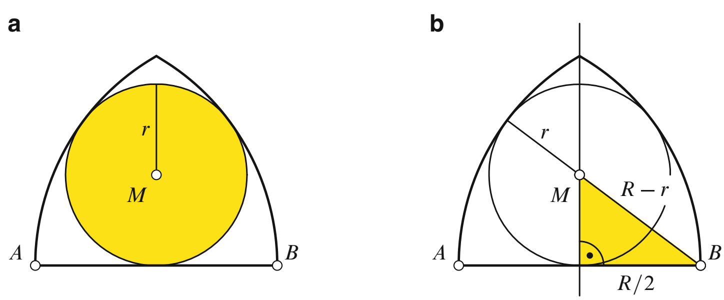

Abb. 1.8 Einbeschriebener Kreis