

LEHRBUCH

Jörg Härterich  
Aeneas Rooch

# Das Mathe- Praxis-Buch

Wie Ingenieure Mathematik  
anwenden – Projekte für die  
Bachelor-Phase

 Springer Vieweg

LEHRBUCH

Jörg Härterich  
Aeneas Rooch

# Das Mathe- Praxis-Buch

Wie Ingenieure Mathematik  
anwenden – Projekte für die  
Bachelor-Phase

 Springer Vieweg

---

**Springer-Lehrbuch**

---

Jörg Härterich · Aeneas Rooch

# Das Mathe-Praxis-Buch

Wie Ingenieure Mathematik anwenden –  
Projekte für die Bachelor-Phase

Jörg Härterich  
Ruhr-Universität Bochum  
Bochum, Deutschland

Aeneas Rooch  
Ruhr-Universität Bochum  
Bochum, Deutschland

ISBN 978-3-642-38305-2  
DOI 10.1007/978-3-642-38306-9

ISBN 978-3-642-38306-9 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media

[www.springer-vieweg.de](http://www.springer-vieweg.de)

# Vorwort

Mathematik spielt in allen ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen eine zentrale Rolle. Üblicherweise jedoch werden mathematische Konzepte und Techniken in den ersten Semestern auf Vorrat gelernt, ohne dass die Relevanz für das eigentliche Studienfach deutlich wird. Viele Studentinnen und Studenten verstehen nicht, warum sie sich mit abstrakter und schwieriger Mathematik beschäftigen sollen, da sie keine Anbindung des Stoffes an technische Fragen und damit keinen Nutzen sehen; dies kann dazu führen, dass sie ihre Motivation und ihr Interesse verlieren und im Extremfall sogar ihr Studium abbrechen.

Aus diesem Grund haben wir an der Ruhr-Universität Bochum das interdisziplinäre Programm *MathePraxis* entwickelt. Es richtet sich an Anfängerinnen und Anfänger in technischen Studiengängen, denen wegen des mangelnden Anwendungsbezugs zunehmend die Motivation fehlt oder die einfach mehr über die Mathematik in ihrem Fach erfahren möchten. Denn häufig fragen zukünftige Ingenieure<sup>1</sup> in mathematischen Lehrveranstaltungen: „Wozu braucht man das?“ Die Antworten jedoch, die Mathematikdozenten geben, stellen sie unserer Beobachtung nach selten zufrieden; und in der Tat haben die meisten Mathematiker höchstens eine vage Vorstellung davon, wie mathematische Techniken im Ingenieursalltag benutzt werden. Erst in späteren Semestern haben die Studentinnen und Studenten ausreichend Grundlagen in Mathematik, Physik und Technik erlernt, um Praxisprobleme anzugehen; erst dann offenbaren die einführenden Lehrveranstaltungen ihren Nutzen. Unser Ziel war es, mit *MathePraxis* diese Erkenntnis vorzuziehen und den Anfängern interessante Praxisprobleme aus verschiedenen Bereichen der Ingenieurwissenschaften vorzustellen, die sie mit Hilfe ihrer Mathematikkenntnisse aus den ersten beiden Semestern lösen können – eine große Herausforderung, denn Praxisprobleme zeichnen sich ja gerade dadurch aus, dass sie eben nicht schnell mit Grundlagenwissen bewältigt werden können, und attraktive technische Fragen erfordern oft nicht nur fortgeschrittene mathematische Methoden, sondern auch Erfahrung und Ausdauer.

In Kooperation mit Lehrstühlen der Fakultät für Maschinenbau und der Fakultät für Bauingenieurwesen der Ruhr-Universität Bochum haben wir vier Projekte erarbeitet und sie in den Jahren 2011 bis 2013 mit mehreren Studentengruppen aus den Fächern Maschinenbau, Bauingenieurwesen und Umwelttechnik erprobt.

---

<sup>1</sup> Sämtliche Bezeichnungen in diesem Buch sollen in gleicher Weise für Personen jeden Geschlechts gelten.

Eine Grundidee von *MathePraxis* besteht darin, den Teilnehmern möglichst viel Freiheit zu geben, in kleinen Gruppen von etwa sechs Personen ihr Vorgehen selbst zu planen, sich notwendige Informationen zu beschaffen und verschiedene Wege zur Lösung der Probleme auszuprobieren. Gleichzeitig sollen sie aber innerhalb von etwa 50 Arbeitsstunden auch zu einem erhellenden und befriedigenden Schluss kommen. Zu diesem Zweck führen Leittexte zur Lösung der vier Praxisprobleme und helfen bei Vereinfachungen und anspruchsvollen Rechnungen, die an der einen oder anderen Stelle nötig sind, um die spannenden Themen trotz ihrer Komplexität mit dem Mathematik-Stoff des ersten Studienjahres erfolgreich behandeln zu können.

In diesem Buch sind diese Leittexte versammelt, ergänzt um einen ausführlichen Lösungsteil, nützliche Anmerkungen und Tipps. Sie sollen ermöglichen, die Praxisprojekte selbst zu behandeln – sowohl in kleinen Gruppen im Rahmen einer Lehrveranstaltung oder einer Projektwoche als auch im Selbststudium als Ergänzung zu den regulären Mathematik- und Mechanikveranstaltungen.

Wir hoffen, dass sich viele Studentinnen und Studenten auf diese Weise schon früh in ihrem Studium selbst vom Nutzen der Mathematik überzeugen können.

Jörg Härterich und Aeneas Rooch  
Bochum, im Mai 2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>XI</b>
<b>I Balancieren mit Differentialgleichungen: Der Segway</b>	<b>1</b>
Jörg Härterich, Martin Mönnigmann, Aeneas Rooch, Moritz Schulze Darup	
<b>1 Die Aufgabe</b>	<b>3</b>
1.1 Steckbrief	3
1.2 Ausführliche Projektbeschreibung	3
1.3 Mathematische Inhalte	4
<b>2 Die Schritte zum Ziel</b>	<b>5</b>
2.1 Ein einfaches Modell aufstellen	5
2.2 Die Bewegung des Pendels verstehen und beschreiben	5
2.3 Zwischenbilanz	8
2.4 Regelung durch Zustandsrückführung	8
<b>3 Die Lösungen</b>	<b>11</b>
3.1 Ein einfaches Modell aufstellen (Aufgaben 2.1)	11
3.2 Die Bewegung des Pendels verstehen und beschreiben (Aufgaben 2.2)	12
3.2.1 Aufstellen der Bewegungsgleichung	12
3.2.2 Linearisieren der Bewegungsgleichung	14
3.2.3 Lösen der Bewegungsgleichung	17
3.3 Zwischenbilanz (Aufgaben 2.3)	21
3.4 Regelung durch Zustandsrückführung (Aufgaben 2.4)	26
3.4.1 Eingang abhängig vom Zustand	26
3.4.2 Bestimmung einer Reglermatrix	27
3.4.3 Die Lösung der neuen Bewegungsgleichungen	28
3.5 Exkurs: Anwendung der Zustandsrückführung	29
<b>4 Das Experiment</b>	<b>35</b>
4.1 Der Versuchsstand	35
4.2 Implementierung und Auswertung des Regelgesetzes	36
4.3 Experimentieren mit dem inversen Pendel	40
4.4 Vom inversen Pendel zum Segway	42
<b>5 Exemplarischer Zeitplan</b>	<b>47</b>

**II Cool bleiben: Design eines Rippenkühlers 51**

Jörg Härterich, Aeneas Rooch

<b>6 Die Aufgabe</b>	<b>53</b>
6.1 Steckbrief . . . . .	53
6.2 Ausführliche Projektbeschreibung . . . . .	53
6.3 Mathematische Inhalte . . . . .	54
<b>7 Die Schritte zum Ziel</b>	<b>55</b>
7.1 Wärmetransport . . . . .	55
7.2 Verstehen, wie Wärme fließt . . . . .	55
7.3 Warmup: Stationäre, eindimensionale Wärmeleitung . . . . .	56
7.4 Der Temperaturverlauf in Kühlrippen . . . . .	57
7.5 Den Wirkungsgrad optimieren . . . . .	61
7.6 Die Anzahl der Rippen optimieren . . . . .	62
<b>8 Die Lösungen</b>	<b>65</b>
8.1 Wärmetransport . . . . .	65
8.2 Verstehen, wie Wärme fließt . . . . .	66
8.3 Stationäre, eindimensionale Wärmeleitung . . . . .	67
8.3.1 Aufstellen der Wärmeleitungsgleichung . . . . .	67
8.4 Der Temperaturverlauf in Kühlrippen . . . . .	72
8.4.1 Wärmeübergang durch Differentialgleichung beschreiben . . . . .	72
8.4.2 Rechteckiges Rippenprofil . . . . .	74
8.4.3 Parabolisches Rippenprofil . . . . .	77
8.4.4 Dreieckiges Rippenprofil . . . . .	79
8.4.5 Diskussion der Annahmen . . . . .	82
8.5 Den Wirkungsgrad optimieren . . . . .	83
8.5.1 Eine einzelne Rippe optimieren . . . . .	83
8.5.2 Maximaler Wärmefluss . . . . .	85
8.6 Die Anzahl der Rippen optimieren . . . . .	87
<b>9 Exemplarischer Zeitplan</b>	<b>95</b>

**III Mit Trigonometrie schaukelfrei ans Ziel: Kransteuerung 97**

Jörg Härterich, Martin Mönnigmann, Aeneas Rooch

<b>10 Die Aufgabe</b>	<b>99</b>
10.1 Steckbrief . . . . .	99
10.2 Ausführliche Projektbeschreibung . . . . .	99
10.3 Mathematische Inhalte . . . . .	100

<b>11 Die Schritte zum Ziel</b>	<b>101</b>
11.1 Modellierung	101
11.2 Linearisierung der Bewegungsgleichungen	103
11.3 Der vorsichtige Kranführer: cosinusförmige Beschleunigung	104
11.4 Der sportliche Kranführer: Rechteck-Beschleunigung	110
11.5 Abschließender Vergleich	114
<b>12 Die Lösungen</b>	<b>115</b>
12.1 Die Bewegungsgleichung (Aufgaben 11.1)	115
12.2 Von der nichtlinearen zur linearen Differentialgleichung (Aufgaben 11.2)	117
12.2.1 Vergleich des nichtlinearen Modells mit der linearisierten Form	118
12.3 Lösung für eine cosinusförmige Beschleunigung (Aufgaben 11.3)	121
12.3.1 Aufstellen der Differentialgleichung	121
12.3.2 Lösen der Differentialgleichung	123
12.3.3 Die Dauer der Beschleunigungsphase	125
12.3.4 Die maximale Beschleunigung	127
12.3.5 Konkrete Sonderfälle	129
12.3.6 Zahlenbeispiele	131
12.4 Lösung für eine Rechteck-Beschleunigung (Aufgaben 11.4)	137
12.4.1 Die Beschleunigungsphase	137
12.4.2 Die Bremsphase	140
12.4.3 Die Symmetriebedingung	141
12.4.4 Die Bewegung in der Fahrtphase	142
12.4.5 Zahlenbeispiele	145
12.5 Abschließender Vergleich	148
12.6 Unter der Lupe: Optimalsteuerung	148
<b>13 Exemplarischer Zeitplan</b>	<b>151</b>
<b>IV Immer mit der Ruhe: Schwingungstilgung</b>	<b>153</b>
Jörg Härterich, Philipp Junker, Aeneas Rooch	
<b>14 Die Aufgabe</b>	<b>155</b>
14.1 Steckbrief	155
14.2 Ausführliche Projektbeschreibung	155
14.3 Mathematische Inhalte	158
<b>15 Die Schritte zum Ziel</b>	<b>159</b>
15.1 Verstehen, wie sich die Masse bewegt	159
15.2 Realistischer modellieren mit Dämpfung	160

15.3	Werkzeug: Lineare Differentialgleichungssysteme lösen . . . . .	164
15.4	Das Praxisproblem lösen . . . . .	165
<b>16</b>	<b>Die Lösungen</b>	<b>167</b>
16.1	Verstehen, wie sich die Masse bewegt (Aufgaben 15.1) . . . . .	167
16.1.1	Lösung der Bewegungsgleichung . . . . .	167
16.1.2	Bewegungsgleichung bei Anregung . . . . .	168
16.1.3	Begriffe klären . . . . .	174
16.1.4	Vermessen des Versuchsaufbaus . . . . .	174
16.2	Realistischere Modellierung mit Dämpfung (Aufgaben 15.2) . . . . .	175
16.2.1	Dämpfungskraft . . . . .	175
16.2.2	Bewegungsgleichung mit Dämpfung . . . . .	175
16.2.3	Bewegungsgleichung mit Dämpfung bei Anregung . . . . .	177
16.3	Lineare Differentialgleichungssysteme (Aufgaben 15.3) . . . . .	183
16.4	Das Praxisproblem (Aufgaben 15.4) . . . . .	192
16.4.1	Korrektur der ersten Masse . . . . .	192
16.4.2	Aufstellen des homogenen DGL-Systems . . . . .	192
16.4.3	Bestimmen der Eigenfrequenzen . . . . .	194
16.4.4	Lösen des inhomogenen DGL-Systems . . . . .	202
16.4.5	Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL . . . . .	205
<b>17</b>	<b>Das Experiment</b>	<b>209</b>
17.1	Experimenteller Aufbau . . . . .	209
17.1.1	Ziele und Anforderungen . . . . .	209
17.1.2	Aufbau und Fertigung . . . . .	210
17.2	Durchführung . . . . .	217
<b>18</b>	<b>Exemplarischer Zeitplan</b>	<b>221</b>

# Abbildungsverzeichnis

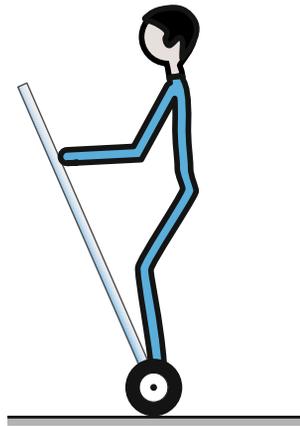
1.1	Inverses Pendel mit relevanten Parametern . . . . .	4
3.1	Linearisierung von Sinus und Cosinus . . . . .	22
3.2	Zustandsverläufe der unregelten Modelle . . . . .	24
3.3	Zustandsverläufe der unregelten Modelle, Detail . . . . .	25
3.4	Zustandsverläufe der geregelten Modelle . . . . .	30
3.5	Anfahrvorgang des inversen Pendels . . . . .	31
3.6	Zustandsverläufe der geregelten Modelle, schnelle Regelung . . . . .	32
3.7	Zustandsverläufe der geregelten Modelle, schnelle Regelung, Detail . . . . .	33
4.1	Schematische Darstellung des inversen Pendels . . . . .	36
4.2	Inverses Pendel als Versuchsstand . . . . .	37
4.3	Synthetischer und realer Regelkreis . . . . .	38
4.4	Blockschaltbild zur Implementierung des Regelgesetzes . . . . .	39
4.5	Verhalten des inversen Pendels für drei Szenarien . . . . .	41
4.6	Schematischer Übergang vom Pendel zum Segway . . . . .	42
4.7	Lego-Segway in Aktion . . . . .	43
4.8	Projektteilnehmer im Feldversuch . . . . .	44
7.1	Profil einer Kühlrippe . . . . .	58
7.2	Verschiedene Rippenprofile . . . . .	59
7.3	Geometrische Größen am Rippenkühler . . . . .	62
8.1	Temperaturverlauf in einer Wand . . . . .	71
8.2	Wärmestrombilanz . . . . .	73
11.1	Transportcontainer am Kranseil . . . . .	102
11.2	Kräfte am schwingenden Pendel . . . . .	102
11.3	Cosinusförmige Beschleunigung . . . . .	105
12.1	Kräfte am schwingenden, bewegten Pendel . . . . .	116
12.2	Linearisierung von Cosinus und Tangens . . . . .	119
12.3	Vorsichtige Beschleunigung . . . . .	122
12.4	Auslenkung während der Fahrt . . . . .	128

14.1 Ein-Massen-Feder-System als Hochhaus-Modell . . . . .	156
14.2 Ein-Massen-Feder-System, ohne Anregung . . . . .	157
14.3 Ein- und Zwei-Massen-Feder-System, Anregung durch Elektromotor	157
16.1 Ein-Massen-Feder-System, partikuläre Lösungen . . . . .	172
16.2 Vergrößerungsfunktion $V$ in Abhängigkeit von $\eta$ . . . . .	183
16.3 Zwei-Massen-Feder-System . . . . .	193
16.4 Amplituden beim angeregten Zwei-Massen-System . . . . .	207
17.1 Demonstrator . . . . .	211
17.2 Obere und untere Platte des Rahmens . . . . .	212
17.3 Geometrie eines Gewichts . . . . .	213
17.4 Masse mit Aussparung und Gewinde . . . . .	214
17.5 Schwungrad, Lichtbrücke und Pleuel . . . . .	215
17.6 Schwungrad . . . . .	216
17.7 Pleuel . . . . .	217
17.8 Demonstrator, verschiedene Szenarien . . . . .	219

# Teil I

## Balancieren mit Differentialgleichungen: Der Segway

Jörg Härterich, Martin Mönningmann, Aeneas Rooch, Moritz Schulze Darup



<b>1 Die Aufgabe</b>	3
1.1 Steckbrief	3
1.2 Ausführliche Projektbeschreibung	3
1.3 Mathematische Inhalte	4
<b>2 Die Schritte zum Ziel</b>	5
2.1 Ein einfaches Modell aufstellen	5
2.2 Die Bewegung des Pendels verstehen und beschreiben	5
2.3 Zwischenbilanz	8
2.4 Regelung durch Zustandsrückführung	8
<b>3 Die Lösungen</b>	11
3.1 Ein einfaches Modell aufstellen (Aufgaben 2.1)	11
3.2 Die Bewegung des Pendels verstehen und beschreiben (Aufgaben 2.2)	12
3.2.1 Aufstellen der Bewegungsgleichung	12
3.2.2 Linearisieren der Bewegungsgleichung	14
3.2.3 Lösen der Bewegungsgleichung	17

3.3	Zwischenbilanz (Aufgaben 2.3)	21
3.4	Regelung durch Zustandsrückführung (Aufgaben 2.4)	26
3.4.1	Eingang abhängig vom Zustand	26
3.4.2	Bestimmung einer Reglermatrix	27
3.4.3	Die Lösung der neuen Bewegungsgleichungen	28
3.5	Exkurs: Anwendung der Zustandsrückführung	29
<b>4</b>	<b>Das Experiment</b>	<b>35</b>
4.1	Der Versuchsstand	35
4.2	Implementierung und Auswertung des Regelgesetzes	36
4.3	Experimentieren mit dem inversen Pendel	40
4.4	Vom inversen Pendel zum Segway	42
<b>5</b>	<b>Exemplarischer Zeitplan</b>	<b>47</b>