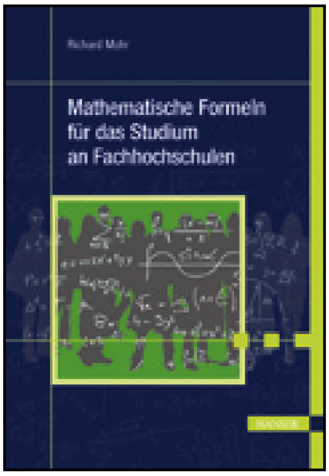
HANSER



Leseprobe

Richard Mohr

Mathematische Formeln für das Studium an Fachhochschulen

ISBN: 978-3-446-42551-4

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser.de/978-3-446-42551-4

sowie im Buchhandel.

9 Funktionen und ihre Graphen

Funktionsbegriff

Eine Funktion ordnet jedem Element x aus einer Menge D_f genau ein Element y aus einer Menge W_f zu.

$$x \longmapsto y \text{ mit } y = f(x),\ x \in D_f$$

Die Menge aller Funktionswerte nennt man Wertebereich W_f .
$W_f = \{y \in W | y = f(x) \text{ mit } x \in D_f\}$.
In der Regel sind x und y reelle Zahlen, komplexe Zahlen oder Vektoren.

D_f	...	Definitionsbereich	$y = f(x)$	...	Funktionsgleichung
W_f	...	Wertebereich	$f(x)$	...	Funktionsterm
x	...	Argument, unabhängige Variable	$f(x_0)$	...	Funktionswert an der Stelle x_0
y	...	abhängige Variable			

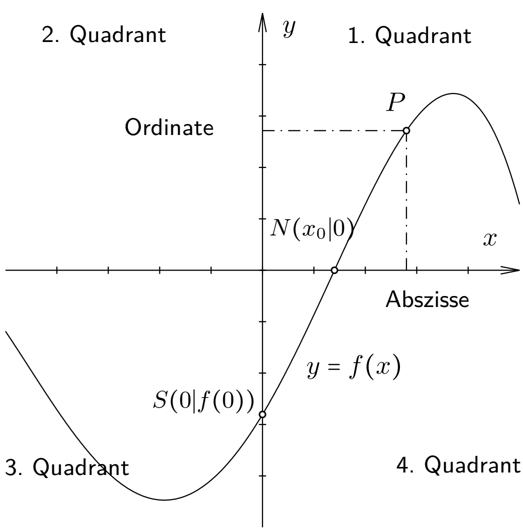
In einer Wertetabelle werden x-Werte und die zugehörigen y-Werte dargestellt. Sie ist häufig Grundlage eines Schaubildes.

Beispiel: $y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + x + 1$

x	-2	-1	0	1	2	...
y	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	5	...

Graph oder Schaubild einer reellen Funktion einer reellen Veränderlichen

Jedem Paar (x, y) mit $y = f(x)$ wird ein Punkt $P(x|y)$ in einem kartesischen Koordinatensystem zugeordnet. Die Menge aller Punkte $P(x|y)$ mit $x \in D_f$ heißt Graph oder Schaubild der Funktion f.
Die Achse, entlang der die unabhängige Variable aufgetragen wird, heißt Abszisse. Die abhängige Variable wird entlang der Ordinate aufgetragen.
Das kartesische Koordinatensystem zerlegt die Ebene in vier Quadranten.
Gilt $f(x_0) = 0$, dann heißt x_0 Nullstelle der Funktion f. Der Graph von f trifft die x-Achse im Punkt $N(x_0|0)$. Für glatte Funktionen ist $N(x_0|0)$ Schnitt- oder Berührpunkt mit der x-Achse.
$S(0|f(0))$ liegt auf der y-Achse.



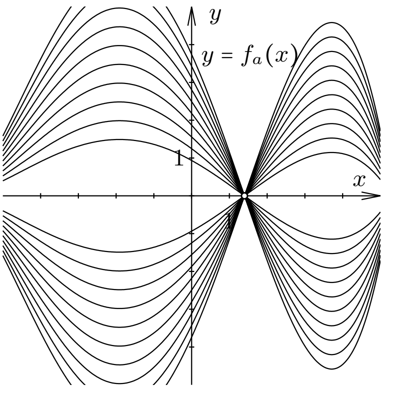
Funktionenschar

Mengen von Funktionen, die sich mithilfe der Funktionsgleichung $y = f_a(x)$ beschreiben lassen. Dabei enthält die Funktionsgleichung neben den Variablen x und y auch noch einen Scharparameter a. Der Parameter a kann alle reellen Zahlen oder auch nur Werte aus einem vorgegebenen Bereich annehmen.

Für jeden Wert des Scharparameters a beschreibt

$x \longmapsto y$ mit $y = f_a(x),\ x \in D_{f_a}$ eine Funktion.

Beispiel: durch $y = a(x-2)+1;\ a \in \mathbb{R}$ werden alle Geraden durch den Punkt $(2|1)$ dargestellt (Ausnahme: die Parallele zur y-Achse).



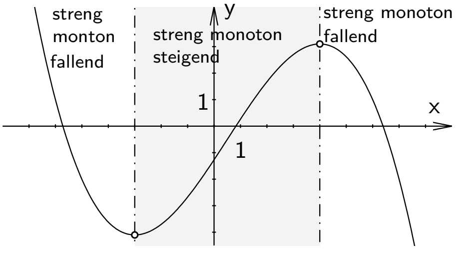
Monotonie

monoton wachsend:

$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2)$

streng monoton wachsend:

$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$

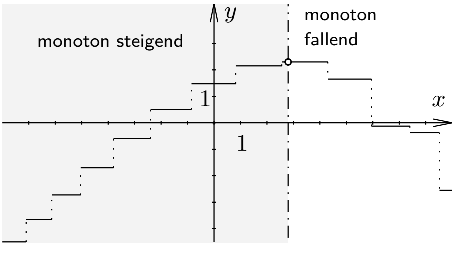


monoton fallend:

$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \ge f(x_2)$

streng monoton fallend:

$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$



Streng monotone Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion (vgl. Seite 60). Die Begriffe monoton wachsend und monoton steigend werden synonym benutzt.
Werden zwei monoton fallende bzw. wachsende Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ hintereinander ausgeführt, so ergibt sich wieder eine monoton fallende bzw. wachsende Funktion $h(x) = f(g(x))$ (vgl. Seite 60).

Beispiel: Die Funktion $y = f(x) = x^3$ ist trotz der waagrechten Tangente bei $x_0 = 0$ streng monoton wachsend.

Symmetrie

Übertragung des geometrischen Begriffs auf das Verhalten von Funktionen.

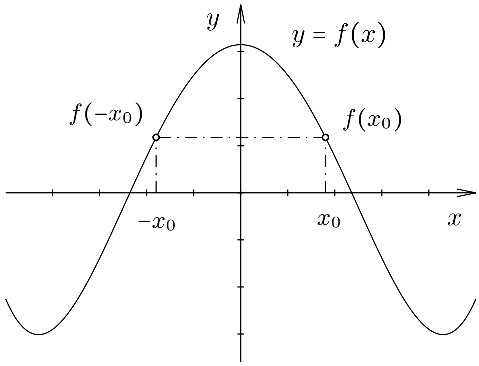
Symmetrie zur y-Achse

Der Graph der Funktion f ist genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn gilt:

$$f(-x) = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in D_f$$

Eine zur y-Achse symmetrische Funktion nennt man gerade Funktion.

Beispiel: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 12$



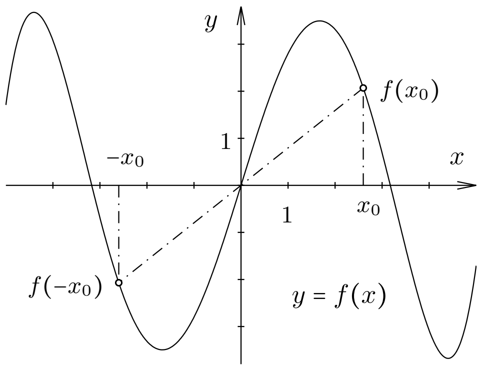
Symmetrie zum Koordinatenursprung

Der Graph der Funktion f ist genau dann symmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn gilt:

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in D_f$$

Eine zum Koordinatenursprung symmetrische Funktion nennt man ungerade Funktion.

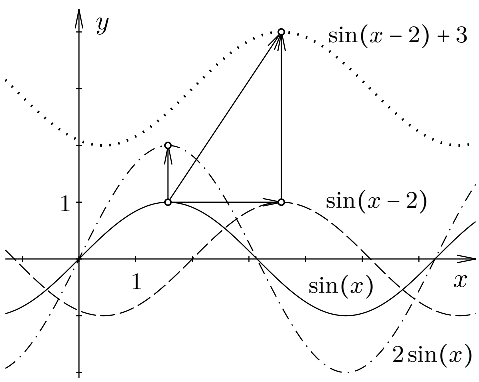
Beispiel: $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x$



Verschieben und Strecken von Graphen

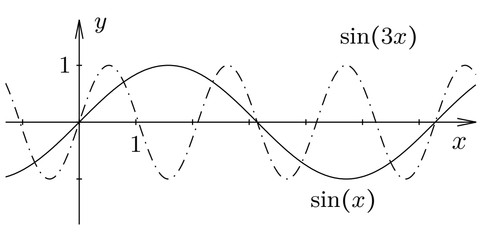
Wird der Graph einer Funktion f um x_0 in x-Richtung und um y_0 in y-Richtung verschoben, so ergibt sich die Funktionsgleichung der verschobenen Funktion g zu:

$$g(x) = f(x - x_0) + y_0$$



Wird der Graph der Funktion f in y-Richtung um den Faktor k gestreckt, so lautet die Funktionsgleichung der gestreckten Funktion h:

$$h(x) = k \cdot f(x)$$



Wird der Graph der Funktion f in x-Richtung um den Faktor k gestaucht, so lautet die Funktionsgleichung der gestauchten Funktion s:

$s(x) = f(k{\cdot}x)$ $\quad$ ($k = -1$ bedeutet eine Spiegelung an der y-Achse)

Verketten von Funktionen

Unter der Verkettung zweier Funktionen f und g versteht man die Funktion:
$h = f \circ g: \ x \ \rightarrow \ f(g(x))$
d. h. das *Hintereinanderausführen* der beiden Funktionsvorschriften.
Man erhält den Funktionsterm von $h = f \circ g$, indem man den Term $g(x)$ der *inneren Funktion* für die Variable x der *äußeren Funktion* $f(x)$ einsetzt.
Das Ergebnis hängt von der Reihenfolge ab!

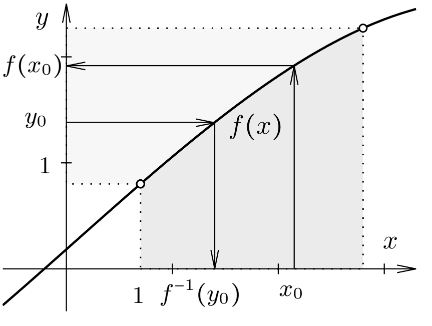
Beispiel:

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$
$$g(x) = 4x^3$$
$$f \circ g: \quad f(g(x)) = \frac{2}{4x^3+1}$$
$$g \circ f: \quad g(f(x)) = 4\left(\frac{2}{x+1}\right)^3$$

Umkehrfunktionen

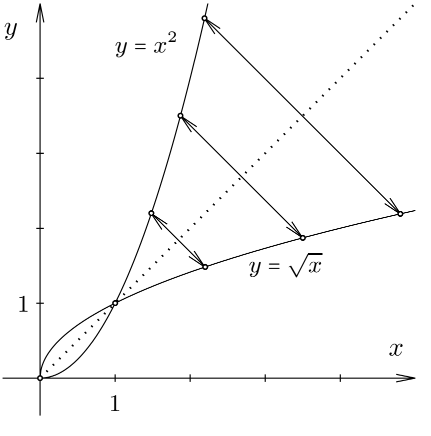
Eine Funktion f ist umkehrbar, wenn zu jedem Funktionswert $y \in W_f$ genau ein Argument $x \in D_f$ gehört. Zu jeder streng monotonen Funktion gibt es eine Umkehrfunktion. Die Funktion f^{-1}, welche den Elementen von W_f eindeutig die Elemente von D_f zuordnet, heißt Umkehrfunktion von f.

Bei Funktionen ist es üblich, die unabhängige Variable mit x zu bezeichnen. Man vertauscht deshalb in der Funktionsgleichung $x = f^{-1}(y)$ die Bedeutung der Variablen x und y und erhält die Umkehrfunktion in der Form $y = f^{-1}(x)$. Durch diese Vertauschung wird das Schaubild der Ausgangsfunktion an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelt.



Vorgehensweise:

- Auflösen von $y = f(x)$ nach x.
  $\Longrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$
- Vertauschen der Variablennamen „x“ und „y“.
  $\Longrightarrow \quad y = f^{-1}(x)$
- Vertauschen von Definitions- und Wertebereich
  $\Longrightarrow \quad D_{f^{-1}} = W_f\,, \ W_{f^{-1}} = D_f$
- Der Graph von f^{-1} entsteht aus dem Schaubild von f durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.



Beispiel: $y = x^2\,; \ x \geq 0 \ \Longrightarrow \ x = \sqrt{y} \ \Longrightarrow \ y = \sqrt{x}$

Spezielle Umkehrfunktionen

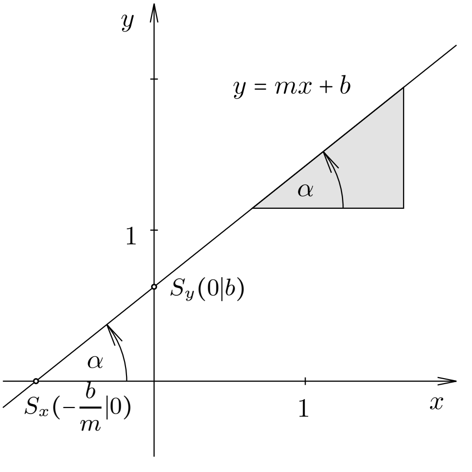
$f(x) = x^n$ mit $x \geq 0\,; n \in \mathbb{N}$	$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ mit $x \geq 0$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ mit $x \neq 0$	$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$ mit $x \neq 0$
$f(x) = \mathrm{e}^x$ mit $x \in \mathbb{R}$	$f^{-1}(x) = \ln(x)$ mit $x > 0$
$f(x) = \sin(x)$ mit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ mit $x \in [-1, 1]$
$f(x) = \cos(x)$ mit $x \in [0, \pi]$	$f^{-1}(x) = \arccos(x)$ mit $x \in [-1, 1]$
$f(x) = \tan(x)$ mit $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$f^{-1}(x) = \arctan(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$

Die obigen Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen nennt man auch *Hauptzweig*.

Lineare Funktion, Gerade

Lineare Funktion

Funktionsgleichung:	$y = mx + b$
Definitionsbereich:	$D_f = \mathbb{R}$
Graph:	Gerade
Steigung der Geraden:	m
y-Achsenabschnitt:	b
Steigungswinkel:	α
Steigung $\Leftrightarrow$ Winkel:	$\tan(\alpha) = m$
Schnittpunkt mit x-Achse:	$S_x(-\frac{b}{m}\|0)$
Schnittpunkt mit y-Achse:	$S_y(0\|b)$
Nullstelle:	$x_0 = -\frac{b}{m}$, wenn $m \neq 0$



Geradengleichung

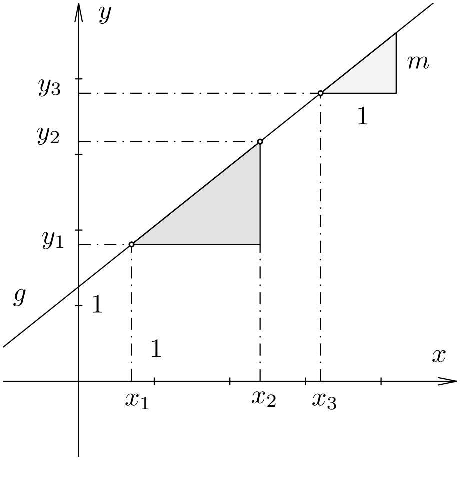
Zwei-Punkte-Form: Gegeben sind zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Punktsteigungsform: Gegeben ist der Punkt $P_3(x_3|y_3)$ und die Steigung m:

$$\frac{y - y_3}{x - x_3} = m$$

Zusammenhang: $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

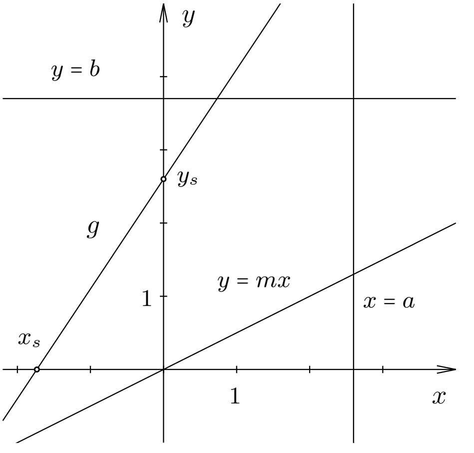


Allgemeine Geradengleichung

$Ax + By + C = 0\,; \quad A, B, C \in \mathbb{R}\,;$
wobei A und B nicht gleichzeitig Null sind.
Die Achsenschnittpunkte ergeben sich zu:
$x_S = -\frac{C}{A}$ bzw. $y_S = -\frac{C}{B}$, wenn $A \cdot B \neq 0$.

Spezialfälle:

$C = 0$	Ursprungsgerade $y = -\frac{A}{B}x = mx$
$B = 0$	Parallele zur y-Achse $x = -\frac{C}{A} = a$
$A = 0$	Parallele zur x-Achse $y = -\frac{C}{B} = b$



Quadratisches Polynom, Parabeln

$y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0\,; \quad a_i \in \mathbb{R}\,;\ D_f = \mathbb{R}$

Ein quadratisches Polynom besitzt bis zu zwei Nullstellen. Sein Graph ist eine Parabel (siehe auch Seite 112).
Aus der *Scheitelform* lassen sich die zum Zeichnen nötigen Werte ablesen.

$y = f(x) = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0$

a	...	Formparameter
$(x_0 \vert y_0)$	...	Scheitel

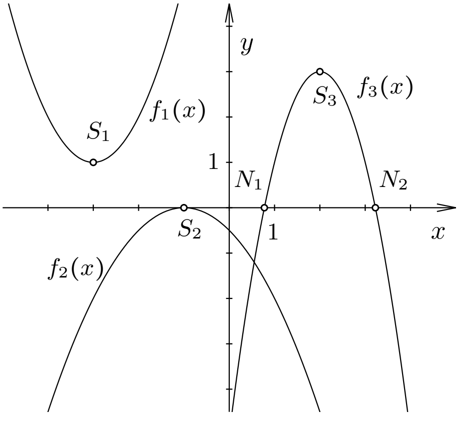
Quadratische Ergänzung ermöglicht die Darstellung in *Scheitelform*.

Beispiele:

$f_1: \quad x^2 + 6x + 10 = (x+3)^2 + 1$

$f_2: \quad -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x+1)^2$

$f_3: \quad -2x^2 + 8x - 5 = -2(x-2)^2 + 3$



Polynome

$$y = p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{R}\,; a_n \neq 0\,;\ n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

heißt ganzrationale Funktion oder Polynom vom Grad n; wobei $D_{p_n} = \mathbb{R}$.
Polynome vom Grad n besitzen höchstens n Nullstellen; ist n ungerade, so existiert mindestens eine Nullstelle. (vgl. auch Seite 24)
Das Verhalten von $p_n(x)$ für große Werte von $|x|$ hängt nur vom höchsten Koeffizienten ab.

$$p_n(x) \approx a_nx^n \quad \text{für } x \to \pm\infty$$

Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

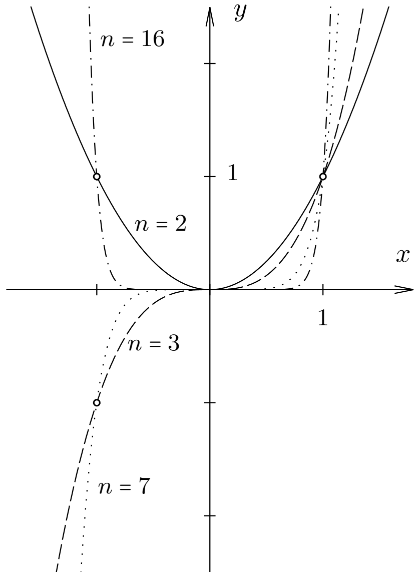
Exponent größer Null

Funktionsgleichung: $y = f(x) = x^n\,,\ n \in \mathbb{N}$

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$

Wertebereich: $\mathbb{R}\,,$ wenn n ungerade; $\mathbb{R}_0^+\,,$ wenn n gerade

Symmetrie: Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn n gerade ist; punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn n ungerade ist.



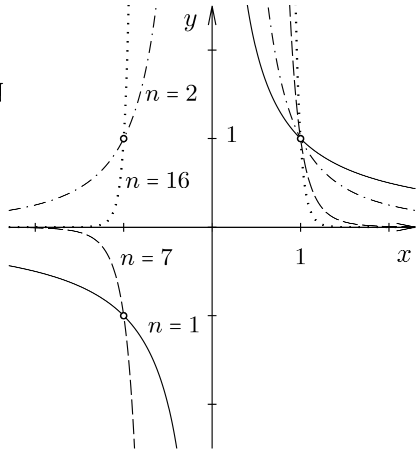
Exponent kleiner Null

Funktionsgleichung: $y = f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}\,,\ n \in \mathbb{N}$

Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Wertebereich: $\mathbb{R}\backslash\{0\}\,,$ wenn n ungerade; $\mathbb{R}^+\,,$ wenn n gerade

Symmetrie: Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn n gerade ist; punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn n ungerade ist.



Für $n = 0$ erhält man $y = f(x) = x^0 = 1$.

Gebrochenrationale Funktionen; Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}\,; \quad \begin{matrix} a_n \neq 0 \\ b_m \neq 0 \end{matrix} \quad \text{o. B. d. A. } b_m = 1$$

Durch Polynomdivision lässt sich für den Fall $n \geq m$ der ganzrationale Anteil abspalten. Für große $|x|$ verhält sich die Funktion $f(x)$ asymptotisch wie das abgespaltene Polynom.

Beispiel: $g(x) = \dfrac{x^6 + 5x^5 + 9x^4 - 10x^2 - x + 6}{x^5 + 5x^4 + 8x^3 - 9x - 5} = x + \dfrac{x^4 - x^2 + 4x + 6}{x^5 + 5x^4 + 8x^3 - 9x - 5}$

$$\begin{array}{l} x^6 + 5x^5 + 9x^4 + 0x^3 - 10x^2 - x + 6 : (x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 0x^2 - 9x - 5) = x + \ldots \\ \underline{x^6 + 5x^5 + 8x^4 + 0x^3 - 9x^2 - 5x} \\ \qquad\qquad x^4 \qquad - x^2 + 4x + 6 \end{array}$$