

Heinrich Hemme
Das große Buch der mathematischen Rätsel

Heinrich Hemme

Das **große Buch**
der
mathematischen
Rätsel

Anaconda



Penguin Random House Verlagsgruppe FSC® N001967

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten
sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2013, 2021 by Anaconda Verlag,
einem Unternehmen der Penguin Random House Verlagsgruppe GmbH,
Neumarkter Straße 28, 81673 München
Alle Rechte vorbehalten.

Umschlagmotive: Thinkstock
Umschlaggestaltung: pecher und soiron, Köln
Satz und Layout: Andreas Paqué, www.paque.de
Druck und Bindung: CPI Books GmbH, Leck
ISBN 978-3-7306-0007-8
www.anacondaverlag.de

Vorwort

Seit der Mensch denken kann, stellt und löst er Rätsel. Im antiken Griechenland erzählte man sich die Geschichte der Sphinx, einem Ungeheuer, das halb Frau und halb Löwe war und vor den Toren der Stadt Theben hauste. Die Sphinx gab jedem Wanderer, der vorüber kam, Rätsel auf und fraß diejenigen, die die Antwort nicht wussten. Eines Tages kam auch Ödipus, der Sohn des Königs Laios, an dem Felsen der Sphinx vorbei. Das Ungeheuer stellte ihm ein Rätsel, von dem es glaubte, dass es niemand lösen könne. „Welches Wesen geht am Morgen auf vier, am Mittag auf zwei und am Abend auf drei Beinen?“ Ödipus dachte nach und sagte dann: „Es ist der Mensch, der in seiner Kindheit auf allen Vieren kriecht, als Erwachsener auf beiden Beinen geht und im Alter einen Stock zur Hilfe nehmen muss.“ Das Rätsel war richtig gelöst, und die Sphinx stürzte sich aus Ärger in den Abgrund, und Ödipus wurde König von Theben.

Die Rätsel des vorliegenden Buches sind zumeist mathematischer Natur, und keiner wird gefressen, der sie nicht löst. Die Aufgaben sind verschieden schwierig. Manche sind nur mathematische Scherze, andere verlangen Grundkenntnisse in Algebra, Geometrie und Zahlentheorie. Bis auf wenige Ausnahmen reichen jedoch die normale Schulmathematik und der gesunde Menschenverstand aus, um die Probleme zu knacken.

Ich habe mich bemüht, die Geschichte der einzelnen Probleme so weit wie möglich zurückzuverfolgen, um ihre Erfinder zu entdecken. Dies war ein sehr schwieriges, ja fast unmögliches Unterfangen, weil kaum ein Autor eines Rätselbuches oder -artikels jemals angibt, woher er seine Aufgaben hat. Ich habe bei jedem Problem die älteste Quelle, die ich gefunden habe, angegeben. Ob dies auch immer der Erfinder des Problems ist, bleibt allerdings sehr fraglich, ja sogar unwahrscheinlich.

Heinrich Hemme
Roetgen, 2013

Inhalt

	Aufgabe	Lösung 1	Lösung 2	Lösung 3
1	Springerzüge	11	93	
2	Der runde See	11	93	
3	Sockenprobleme	11	94	253
4	Die Teilung des Kuchens	12	94	253
5	Die Schnecke und die Fahnenstange	12	95	254
6	Die Ecken des Quadrats	12	96	
7	Ein Problem für Biertrinker	12	96	
8	Dreieckslinien	13	97	
9	Freitag, der 13.	13	97	
10	Ein rechtwinkliges Zwölfeck	13	98	
11	Der Bücherwurm	13	99	
12	Das Zweieurostück	14	99	
13	Zwei Freundinnen	14	100	
14	Das magische Multiplikationsquadrat	14	101	
15	Quadrate, Kuben und fünfte Potenzen	15	104	
16	Der Handelsreisende	15	105	
17	Der Billardtisch	16	105	
18	Rationale und irrationale Zahlen	16	106	
19	Der Treffpunkt	16	107	
20	Das Zersägen eines Schachbretts	17	108	255
21	Der Schnellrechner	17	108	
22	Die Weinflasche	17	109	
23	Die fehlerhafte Ungleichung	17	109	
24	Bestimmungsgrößen von Dreiecken	18	110	
25	Das geplättete Polyeder	18	111	
26	Die vier Schnecken	18	111	
27	Lügner	19	112	
28	Ein Wurzelvergleich	19	112	
29	Inecke und Umecke	19	113	255
30	Fakultäten	19	114	
31	Eine diophantische Gleichung	20	114	
32	Determinanten	20	115	

33	Ein mathematisches Symbol	20	116		
34	Widerstände	20	116	256	
35	Die Stellenzahl	21	117		
36	Eine kuriose Zahl	21	118		
37	Die Kosinussumme	21	118		
38	Diagonalen	21	119	257	
39	Der verknäulte Expander	22	119		
40	Reihen	22	120	257	
41	Dreieck und Kreise	22	120		
42	Sechs Menschen	23	121		
43	Teilbarkeit durch 8	23	122		
44	Das Pentagon	23	122		
45	Die sieben Punkte	24	124		
46	Eine Parallelprojektion	24	125		
47	Große Zahlen	24	125		
48	Der Wert 1	24	126		
49	Volumen und Oberfläche	25	126		
50	Die Rundtour des Springers	25	127		
51	Das Problem des Händeschüttelns	26	128		
52	Das geteilte Blatt	26	130		
53	Tetrominos	27	130	258	
54	Die Händedrücke	27	131		
55	Das Färben von Landkarten	27	133	259	278
56	Die vertauschten Uhrzeiger	28	134		
57	Ein bruchlinienfreies Schachbrett	29	134		
58	Fünf Punkte im Quadrat	29	135		
59	Die vierte Lüge	29	135		
60	Primzahlen	30	136	260	
61	Parallele Durchmesser	30	136		
62	Die Winkel einer Pyramide	30	136		
63	Hundert Ziffern	31	137		
64	Das reguläre Oktaeder	31	138	261	280
65	Milchkaffee	31	139		
66	Polygone	32	139	262	
67	Die Fahrt nach München	32	140		
68	Tetraeder und Oktaeder	32	141	263	
69	Teilbarkeit durch 7	33	142		
70	Das Oktaeder im Würfel	33	142		
71	Die Länge einer Helix	34	144		
72	Die Frage des Forschers	34	144		
73	Monominos und Triominos	34	145		
74	Der Davidstern	35	146		
75	Die seltsame Vermehrung	35	147		

76	Der Springertausch	36	148	
77	Eine seltsame Zahlenmenge	36	149	
78	Der Würfel	37	149	
79	Konstante Münzumfänge	37	150	
80	Das magische Sechseck	38	150	
81	Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln	39	151	264
82	Die Spinne	39	152	
83	Der Jäger	40	153	
84	Die Endziffern	40	155	
85	Die Läufer auf dem Schachbrett	40	156	
86	Die drei Töchter	41	156	
87	Das Spiel mit der Dame	41	157	
88	Kettenbrüche	42	159	
89	Die Postkartenskulptur	43	159	
90	Der Kreis auf dem Schachbrett	43	160	
91	Die zerrissene Kette	43	161	
92	Der Vier-Banden-Stoß	44	162	
93	Kreissehnen	45	163	
94	Münzsprünge	45	164	
95	Quadratzahlen	46	164	264
96	Briefmarkenkombinationen	46	165	
97	Kalenderblätter	47	166	265
98	Die Streichholzgleichung	47	167	
99	Das Zwanzig-Fragen-Spiel	48	167	
100	Die Fluggesellschaft	48	168	
101	Sieben Zigaretten	48	169	
102	Fakultäten	49	169	266
103	Linien auf dem Schachbrett	49	170	
104	Die Linie im Dreieck	50	170	
105	Acht gleichseitige Dreiecke	50	171	266
106	Die drei Kreise	50	171	
107	Die Erbsen	51	172	
108	Die Maximierung	51	173	267
109	Die größte dreiziffrige Zahl	51	175	
110	Vier Punkte	51	175	
111	Die drei Zahlenklassen	52	176	
112	Eine Fünf-Sekunden-Aufgabe	52	176	
113	Das Kartenspiel	52	176	
114	Die Winkelhalbierenden	52	177	
115	Polyeder mit drei eckigen Flächen	53	177	268
116	Das Elektrokabel	53	178	
117	Ein Türenproblem	53	180	
118	Angreifer und Verteidiger	53	180	

119	Dreiecke und Rechteck	54	181		
120	Das Würfelspiel	54	182		
121	Fünf Würfel auf dem Schachbrett	54	183		
122	Der Satz des Pythagoras	56	184		
123	Die Multiplikation	57	186		
124	Das Dreieck im Dreieck	57	186		
125	Reihen	57	187	269	
126	Bruchteile ganzer Zahlen	57	188		
127	Die acht Papierquadrate	58	188		
128	Dreitafelprojektionen	58	189		
129	Palindrome	59	190	269	281
130	Kluge und dumme Leute	59	191		
131	Das Spiel mit den Hüten	59	191		
132	Das rollende Tetraeder	60	192		
133	Eine Liste von Sätzen	61	193	270	
134	Das Siebzehneck und der Kreis	61	193		
135	Ein Färbungsproblem	61	194		
136	Die fehlende Ziffer	63	195	270	
137	Das Labyrinth	63	195		
138	Zehnstellige Zahlen	64	197		
139	Der Abstand der Primzahlen	64	197		
140	Das Centspiel	64	197		
141	Der Geburtstag	64	198		
142	Der Müller	65	200		
143	Das Quadrat im Quadrat	65	200		
144	Hühnerpreise	65	201		
145	Die Ringfläche	66	202		
146	Die zehn Reisenden	66	202		
147	Lügner, Ehrliche und Mixer	67	202		
148	Nullen und Einsen	68	203	271	
149	Der Weg durch das Haus	68	203		
150	Eine Zahlenreihe	68	204	271	
151	Das Sparbuch	68	204		
152	Magische Quadrate	69	205	271	
153	Die Verteilung des Erbes	69	205		
154	Das Differenzendreieck	70	207		
155	Sich schneidende Kreise	71	207		
156	Die Streichholzschaufel	71	208		
157	Durch 12 teilbare Zahlen	72	208		
158	Eine Aufgabe zum Kopfrechnen	72	209		
159	Die Halbierung	72	209		
160	Ein unvollständiges Produkt	72	210		
161	Ungerade Zahlen und Quadratzahlen	73	211		

162	Quadratzerlegungen	73	211	272	282
163	Die zerstörten Schachfelder	73	212		
164	Ein Primzahlenproblem	74	213		
165	Ein Gerüst aus Würfeln	74	213		
166	Ein seltsamer Würfel	75	214		
167	Der Kegelklub	75	215		
168	Unfaire Würfel	75	215		
169	Die mathematischen Löcher	76	219	273	
170	Das Fußballturnier	76	220		
171	Buchstabengruppen	77	221		
172	Zahlenquadrat aus Rom	77	221		
173	Die Suche nach des besten Ehefrau	78	222		
174	Straßenbahn kreuzt Fahrbahn	78	226		
175	Ein Rechteck aus Quadraten	78	226		
176	Wie geht es weiter?	79	227		
177	Das Achteck	79	228	274	
178	Der Weg zum Waldrand	79	229		
179	Die Flucht über den Rhein	80	231		
180	Uhrzeiten in den USA	80	231		
181	Geradlinig zerstörbare Hexominos	81	232		
182	Der Weg zur Arbeit	82	232		
183	Die Zeiger der Küchenuhr	83	233		
184	Prometheus, Adonis und ich	83	235		
185	Die Zahl der Kalender	84	236		
186	Der König auf dem Schachbrettchen	84	236		
187	Das gevierteilte Dreieck	84	237		
188	Das Wegasystem	85	239		
189	Ein berühmtes Zwölfeck	85	240		
190	Adventskranzkerzen	85	241		
191	Heim- und Auswärtsspiele	86	241		
192	Der Professor auf der Rolltreppe	86	242		
193	Der größte gemeinsame Teiler	86	242		
194	Drei verschachtelte Quadrate	87	243		
195	Zahlenfolge	87	244		
196	Die Zerlegung	88	245	276	
197	Einundzwanzig Streichhölzer	88	245		
198	Die Quadratur des Kreises	88	246		
199	Was ist das?	90	249		
200	Das Schachbrettdreieck	91	249		
201	Summe und Produkt	91	250		
202	Burpsige Zahlen	92	251		
203	Tante Gerdas Traummann	92	251		

Aufgaben

1 Springerzüge

Jedes der fünfundzwanzig Felder eines 5×5 -Schachbretts ist mit einem Springer besetzt. Mit allen fünfundzwanzig Figuren soll gleichzeitig ein Zug gemacht werden; anschließend muss auf jedem Feld wieder ein Springer stehen. Es sind natürlich nur die beim Schach üblichen Springerzüge erlaubt.

Wie müssen die einzelnen Züge aussehen? Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?

2 Der runde See

Ein Mann steht am Ufer eines kreisrunden Sees. Er springt in das Wasser und schwimmt genau nach Norden. Nach sechzig Metern trifft er wieder auf das Ufer. Dort ändert er seine Richtung, schwimmt nach Osten und erreicht nach achtzig Metern erneut das Ufer.

Welchen Durchmesser hat der See?

3 Sockenprobleme

In einem Korb werden rote, in einem zweiten grüne und in einem dritten rote und grüne Socken aufbewahrt. Auf den Deckeln der Körbe sind Schilder, auf denen ihr Inhalt verzeichnet ist. Leider wurden alle Deckel vertauscht, so dass kein Korb mehr richtig beschriftet ist.

Sie dürfen nacheinander in die Körbe greifen und jeweils eine Socke herausnehmen, ohne sich dabei den Rest des Inhalts anzusehen.

Wie viele Socken müssen Sie mindestens aus den Körben nehmen, um alle Deckel wieder richtig zuzuordnen zu können? In welche Körbe müssen Sie greifen?

4 Die Teilung des Kuchens

Tante Gertrud ist zu Besuch gekommen. Sie hat ihrem Neffen und ihrer Nichte einen Kuchen gebacken. „Teilt ihn euch gerecht auf!“, sagt sie und gibt Alfred den Kuchen.

Wie können Alfred und Berta Streitereien vermeiden und den Kuchen so teilen, dass beide davon überzeugt sind, mindestens die Hälfte bekommen zu haben?

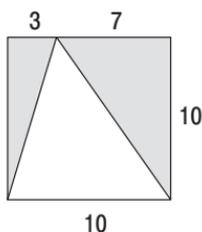
5 Die Schnecke und die Fahnenstange

Eine Schnecke beginnt eines Tages im Morgengrauen eine 17,5 Meter hohe Fahnenstange hinauf zu kriechen. Sie schafft am Tag 5,25 Meter, rutscht aber in der Nacht, wenn sie schläft, wieder um 3,50 Meter herunter.

Wann erreicht die Schnecke die Spitze der Fahnenstange?

6 Die Ecken des Quadrats

Von einem Quadrat mit einer Kantenlänge von zehn Zentimetern sind zwei Ecken abgeschnitten worden. Die genauen Maße gehen aus der Skizze hervor.



Wie groß ist die Fläche der beiden abgeschnittenen grauen Stücke zusammen?

7 Ein Problem für Biertrinker

Diese Aufgabe ist für alle mathematisch interessierten Biertrinker gedacht und dürfte für jeden Stammtisch geeignet sein.

Ein halbvolles Glas Bier ist bekanntlich das Gleiche wie ein halb-leeres Glas Bier. Mathematisch ausgedrückt heißt das:

$$\frac{1}{2} \text{ volles Glas Bier} = \frac{1}{2} \text{ leeres Glas Bier}$$

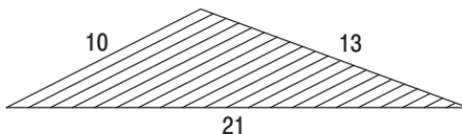
Wenn man beide Seiten der Gleichung mit 2 multipliziert, so ergibt sich daraus:

$$1 \text{ volles Glas Bier} = 1 \text{ leeres Glas Bier}$$

Was ist falsch?

8 Dreieckslinien

In einem Dreieck mit den Seitenlängen 10, 13 und 21 Zentimeter sind zwanzig Linien eingezeichnet, die alle parallel zur kürzesten Dreiecksseite verlaufen und die das Dreieck in einundzwanzig gleichbreite Streifen zerteilen.



Wie groß ist die Gesamtlänge dieser Linien?

9 Freitag, der 13.

Wie viele Freitage, die auf einen 13. fallen, gibt es mindestens und wie viele höchstens in einem Jahr?

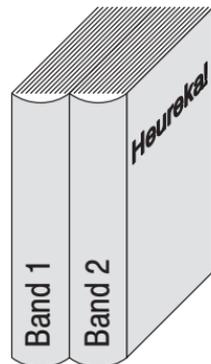
10 Ein rechtwinkliges Zwölfeck

Bei einem gleichseitigen Zwölfeck können nicht alle benachbarten Seiten rechtwinklig aufeinander stoßen. Versuchen Sie, diese Behauptung zu beweisen!

11 Der Bücherwurm

Ein Bücherfreund kauft sich ein neues zwei-bändiges Werk. Er schlägt den Einbanddeckel des ersten Bandes auf, schreibt seinen Namen auf das Vorsatzblatt, schließt das Buch wieder und stellt beide Bände ordnungsgemäß in sein Regal.

Beim Schreiben des Namens ist un-bemerkt ein Bücherwurm zwischen den Ein-



banddeckel und die erste Seite gefallen. Der Wurm beginnt sofort zu nagen. Er braucht zum Durchfressen eines Blattes einen Tag und eines Einbanddeckels drei Tage. Jeder der beiden Bände hat zweihundert Seiten.

Wie lange braucht der Bücherwurm, bis er auf den hinteren Einbanddeckel des zweiten Bandes stößt?

12 Das Zweieurostück

Ein Zweieurostück hat einen Durchmesser von 25,75 Millimetern. Wie groß muss ein kreisförmiges Loch in einem Blatt Papier mindestens sein, damit man diese Münze dort hindurchstecken kann?

13 Zwei Freundinnen

Ein junger Mann hat zwei Freundinnen, eine blonde und eine schwarzhaarige. Er wohnt in der Innenstadt, seine blonde Freundin in einem nördlichen und seine schwarzhaarige in einem südlichen Vorort.

In der Nähe der Wohnung des jungen Mannes liegt eine U-Bahnstation, von der alle zehn Minuten ein Zug nach Norden geht, und auch die Züge nach Süden fahren mit jeweils zehn Minuten Abstand.

Jeden Tag besucht der junge Mann eine seiner Freundinnen. Da er beide Mädchen gleich gerne mag, überlässt er es dem Zufall, zu welcher er fährt. Er geht einfach irgendwann, ohne auf die Uhr zu schauen, zur U-Bahnstation und steigt in den Zug, der zuerst ankommt. Fährt dieser Zug nach Norden, besucht er seine blonde Freundin, fährt er nach Süden, besucht er das schwarzhaarige Mädchen. Trotzdem stellt er nach einigen Monaten fest, dass er neunmal so oft bei der Freundin im Norden als bei der im Süden war.

Woran kann das liegen?

14 Das magische Multiplikationsquadrat

Ein magisches Quadrat ist ein Raster aus $n \times n$ Feldern, in denen die Zahlen von 1 bis n^2 so verteilt sind, dass ihre Summen in den n Feldern jeder Zeile, jeder Spalte und der beiden Diagonalen gleich sind.

Da es ein magisches 2×2 -Quadrat nicht gibt, hat das einfachste Quadrat neun Felder. Wenn man von den Varianten absieht, die durch Drehungen und Spiegelungen der Grundform entstehen, so gibt es nur ein einziges magisches 3×3 -Quadrat. Die Summe in seinen Zeilen, Spalten und Diagonalen beträgt jeweils 15.

Dieses Quadrat, Loh Shu genannt, kennt man in China schon seit dem vierten vorchristlichen Jahrhundert.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Bei der normalen Art von magischen Quadraten ist die Summe der Zeilen-, Spalten- und Diagonalelemente konstant. Kann es auch 3×3 -Quadrate geben, bei denen das Produkt der Zahlen jeder Zeile, Spalte und Diagonalen gleich ist?

In den Feldern eines solchen Multiplikationsquadrates brauchen nicht die Zahlen von 1 bis 9 zu stehen. Sie dürfen irgendwelche positiven ganzen Zahlen nehmen, die jedoch alle verschieden sein müssen.

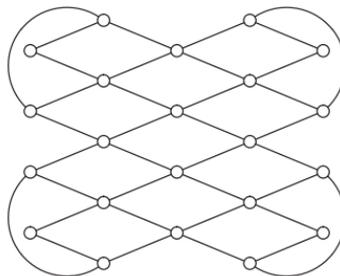
15 Quadrate, Kuben und fünfte Potenzen

Die 1 ist die kleinste positive ganze Zahl, die gleichzeitig eine Quadratzahl, eine Kubikzahl und die fünfte Potenz einer ganzen Zahl ist.

Wie heißt die zweitkleinste Zahl mit diesen Eigenschaften?

16 Der Handelsreisende

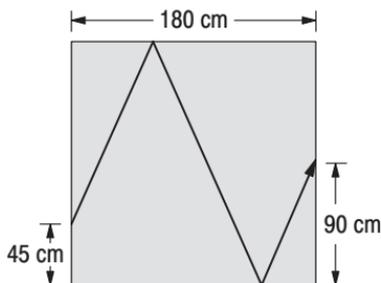
Ein Handelsreisender muss zweiundzwanzig Städte besuchen. Damit er zum Wochenende wieder pünktlich zu Hause ist, möchte er durch keine Stadt mehr als einmal fahren. Dabei darf er natürlich nur die auf der Karte eingezeichneten Straßen benutzen.



Ist eine solche Rundtour möglich, und wenn ja, in welcher Stadt muss er seine Reise beginnen, und wo endet sie?

17 Der Billardtisch

Auf einem quadratischen Billardtisch, der eine Seitenlänge von 1,80 m hat, liegt direkt an der Bande, 45 cm von der vorderen linken Ecke entfernt, eine Kugel. Sie soll durch den in der Abbildung gezeigten Zweibandestoß zur Mitte der gegenüberliegenden Bande rollen.



An welchen Stellen trifft die Kugel die hintere und die vordere Bande, wenn der Ausfallswinkel bei der Reflexion gleich dem Einfallswinkel ist?

18 Rationale und irrationale Zahlen

Zahlen, die sich auch als Bruch schreiben lassen, wie zum Beispiel $0,5 = \frac{1}{2}$ oder $0,333\dots = \frac{1}{3}$, nennt man rationale Zahlen. Alle anderen Zahlen, wie beispielsweise $\sqrt{2} = 1,4142\dots$, $\pi = 3,1415\dots$ oder $e = 2,7182\dots$ heißen irrationale Zahlen. Beide Zahlenarten zusammen bilden die Menge der reellen Zahlen.

Wenn man eine irrationale Zahl mit einer zweiten irrationalen Zahl potenziert, erhält man in der Regel als Ergebnis wieder eine irrationale Zahl. Muss das immer so sein, oder kann das Ergebnis in manchen Fällen auch eine rationale Zahl sein?

19 Der Treffpunkt

Zwei Freunde essen jeden Mittag im selben Restaurant. Jeder der beiden geht jeden Tag irgendwann zwischen zwölf und dreizehn Uhr in das Lokal, bleibt dort immer genau eine halbe Stunde zum Essen und verlässt es dann wieder.

Wenn die beiden Eintreffpunkte der Freunde völlig zufällig irgendwann zwischen zwölf und dreizehn Uhr liegen, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich treffen?

20 Das Zersägen eines Schachbretts

Ein Tischler soll ein Schachbrett mit einer Kreissäge, mit der man nur gerade Schnitte ausführen kann, entlang der Feldgrenzen in die vierundsechzig einzelnen Quadrate zerlegen. Er darf nach jedem Schnitt die entstandenen Teile beliebig übereinanderlegen und dann gleichzeitig durchsägen.

Wie oft muss er mindestens sägen?

21 Der Schnellrechner

Der große deutsche Mathematiker, Physiker und Astronom Carl Friedrich Gauß (1777–1855) ging als Kind in Braunschweig zur Schule.

Eines Tages – Gauß war etwa acht Jahre alt – brauchte sein Lehrer Büttner dringend für längere Zeit Ruhe, um Hefte zu korrigieren. Er stellte deshalb der Klasse die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zusammenzuzählen. Nach wenigen Minuten kam der kleine Gauß nach vorne und legte dem Lehrer seine Tafel, auf der nur eine einzige Zahl stand – das richtige Ergebnis –, aufs Pult.

Wie lautete diese Zahl, und wie hatte sie der kleine Gauß errechnet?

22 Die Weinflasche

Eine volle Flasche Wein kostet in dem Laden an der Ecke fünf Euro. Der Wein ist vier Euro mehr wert als die Flasche.

Wie hoch ist das Flaschenpfand?

23 Die fehlerhafte Ungleichung

Die Ungleichung

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

ist offensichtlich richtig. Wir logarithmieren nun beide Seiten mit der Basis $\frac{1}{2}$ und erhalten:

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$3 \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) < 2 \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)$$

Da für Logarithmen das Gesetz $\log_b b = 1$ gilt, muss $3 < 2$ sein. Wo steckt der Fehler?

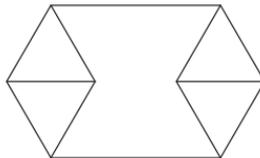
24 Bestimmungsgrößen von Dreiecken

Jedes Dreieck hat sechs Bestimmungsgrößen: drei Seiten und drei Winkel. In vielen Geometrieschulbüchern kann man lesen, dass zwei Dreiecke kongruent, das heißt, deckungsgleich sind, wenn entweder zwei Winkel und eine Seite oder ein Winkel und zwei Seiten oder alle drei Seiten gleich sind.

Kann es Dreiecke geben, bei denen die Werte von fünf Bestimmungsgrößen übereinstimmen und die trotzdem nicht kongruent oder spiegelbildlich sind?

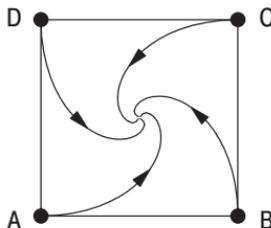
25 Das geplättete Polyeder

Das Skelett eines Polyeders wird von seinen Kanten und Ecken gebildet. Stellt man sich die Kanten als Gummifäden vor, kann man das Skelett so weit dehnen, dass es sich flach auf einem Tisch ausbreiten lässt.



Die Abbildung zeigt ein geplättetes Polyederskelett. Haben Sie ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen? Dann versuchen Sie herauszubekommen, wie der Körper ursprünglich ausgesehen hat!

26 Die vier Schnecken



Vier Schnecken – A, B, C und D – sitzen auf den Ecken eines Quadrats von einem Meter Seitenlänge. Gleichzeitig und mit gleichen

Geschwindigkeiten kriechen A auf B, B auf C, C auf D und D auf A zu. Da die Schnecken ständig ihre Richtungen ändern müssen, um immer genau aufeinander zu zu kriechen, sind ihre Bahnen Spiralen, die sich im Mittelpunkt des Quadrates treffen.

Wie lang ist der Weg jeder Schnecke bis zum Treffpunkt?

27 Lügner

Ein Junge und ein Mädchen sitzen auf einer Parkbank. „Ich bin ein Junge“, sagt das Kind mit den schwarzen Haaren. „Und ich bin ein Mädchen“, antwortet das mit den blonden Haaren. Wenigstens ein Kind lügt.

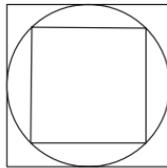
Welche Haarfarbe hat das Mädchen?

28 Ein Wurzelvergleich

Welche der Zahlen $\sqrt[4]{10}$ und $\sqrt[3]{2}$ ist größer? Versuchen Sie diese Frage zu beantworten, ohne einen Taschenrechner oder einen Computer zu benutzen.

29 Inecke und Umecke

Einem Quadrat ist ein Kreis einbeschrieben, der wiederum Umkreis eines zweiten Quadrates ist.



In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der beiden Quadrate?

30 Fakultäten

Fakultäten sind Zahlen, die sehr schnell anwachsen. So ist $13!$ bereits eine zehnstellige Zahl. Versuchen Sie ohne Taschenrechner, Tabelle oder viel Arbeit herauszubekommen, welche der drei folgenden Zahlen gleich $13!$ ist: 6 227 020 800, 6 227 028 000 oder 6 227 080 002.

31 Eine diophantische Gleichung

Eine diophantische Gleichung ist eine Gleichung, deren Lösungen ganzzahlig sein müssen. Sie haben ihren Namen von dem griechischen Mathematiker Diophantos, der um 250 n. Chr. in Alexandria lebte.

$$187x - 104y = 41$$

Für diese diophantische Gleichung sind fünf Lösungsvorschläge vorhanden: Vier davon sind richtig, einer ist falsch. Finden Sie das falsche Zahlenpaar heraus, ohne Bleistift und Papier und ohne einen Taschenrechner zu benutzen!

- Lösungsvorschläge:
- a) $x = 3, \quad y = 5$
 - b) $x = 107, \quad y = 192$
 - c) $x = 211, \quad y = 379$
 - d) $x = 314, \quad y = 565$
 - e) $x = 419, \quad y = 753$

32 Determinanten

Die neun Ziffern von 1 bis 9 können auf $9! = 362880$ verschiedene Weisen zu einer 3×3 -Matrix angeordnet werden. Zu jeder dieser Matrizen gehört eine Determinante.

Wie groß ist die Summe aller 362880 Determinanten?

33 Ein mathematisches Symbol

Welches mathematische Symbol muss man zwischen die beiden Ziffern

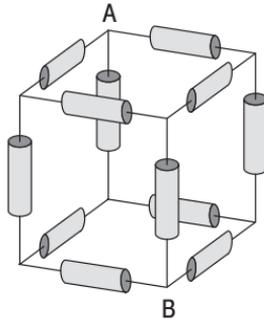
$$2 \quad 3$$

setzen, damit das Ergebnis größer als 2, aber kleiner als 3 wird? Es dürfen natürlich keine neuen Symbole erfunden werden.

34 Widerstände

Diese Aufgabe ist nicht rein mathematischer Natur, sondern gehört in den Bereich der Elektrotechnik. Die Lösung ist jedoch so elegant, dass ich nicht darauf verzichten wollte, das Problem in diese Sammlung aufzunehmen.

Das Skelett eines Würfels, das von seinen Kanten und Ecken gebildet wird, ist aus zwölf 1-Ohm-Widerständen zusammengelötet.



Wie groß ist der Gesamtwiderstand zwischen den beiden sich diagonal gegenüberliegenden Ecken A und B?

35 Die Stellenzahl

Wie viele Stellen hat die Zahl 2^{-n} in Dezimaldarstellung nach dem Komma? Die Größe n soll eine positive ganze Zahl sein.

36 Eine kuriose Zahl

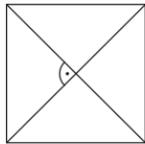
Gibt es eine positive reelle Zahl, deren Fünftel mit ihrem Siebtel multipliziert die Zahl selbst ergibt?

37 Die Kosinussumme

Wie groß ist die Summe der fünf Kosinus?
 $\cos 5^\circ + \cos 77^\circ + \cos 149^\circ + \cos 221^\circ + \cos 293^\circ = ?$

38 Diagonalen

Die Diagonalen eines Quadrates sind gleich lang und schneiden sich unter rechten Winkeln.

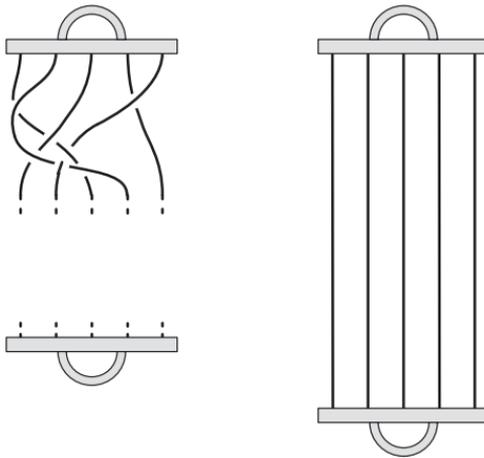


Haben auch die dreidimensionalen Analoga, die Raumdiagonalen eines Würfels, diese Eigenschaft?

39 Der verknäulte Expander

Ein Expander liegt entspannt auf dem Tisch; die fünf Gummiseile sind verknäult. Von den Seilen ist nur der obere Teil gezeichnet worden.

Ergänzen Sie die Zeichnung so, dass die fünf Seile im gestreckten Zustand des Expanders nicht verflochten sind und parallel verlaufen. In der Skizze deutet die durchbrochene Linie an einem Schnittpunkt von zwei Seilen das untere der beiden an.



40 Reihen

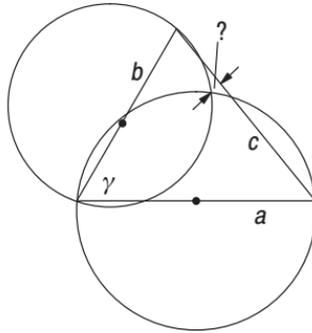
Die Zahlen dieser Reihe sind nach einem bestimmten Gesetz gebildet worden.

1, 8, 11, 69, 88, 96, 101, 111, ...

Wie lautet das Gesetz, und wie heißt die nächste Zahl in der Reihe?

41 Dreieck und Kreise

Bei einem Dreieck ist die Grundseite a um zehn Zentimeter länger als die Seite b . Der von beiden Seiten eingeschlossene Winkel γ beträgt 60° . Zwei Kreise, die diese Dreiecksseiten als Durchmesser haben, schneiden sich zweimal: Einer der Schnittpunkte ist die Ecke, an der sich a und b treffen.



Wie weit ist der zweite Schnittpunkt von der dritten Dreiecksseite c entfernt?

42 Sechs Menschen

Von sechs völlig willkürlich aus der Weltbevölkerung herausgegriffenen Menschen gibt es immer drei, die sich entweder gegenseitig kennen oder die sich völlig fremd sind. Warum?

43 Teilbarkeit durch 8

Eine fünfzehnstellige Zahl soll mit dem Taschenrechner darauf untersucht werden, ob sie sich ohne Rest durch 8 teilen lässt. Leider arbeitet der Rechner nur mit acht Stellen.

Mit welchem einfachen Trick geht es trotzdem?

44 Das Pentagon

Ein Spion beobachtet mit einem Feldstecher das amerikanische Verteidigungsministerium, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Fünfeck ist. Es wird deshalb auch meistens Pentagon genannt.

Der Spion hat sein Versteck in sehr großer Entfernung vom Pentagon gewählt, und er kann darum zwei oder drei Seiten des Gebäudes sehen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er drei Seiten des Pentagons sehen kann, wenn er seine Position völlig zufällig auswählt? Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, dass seine Sicht nicht durch Häuser, Bäume, Berge oder irgendwelche anderen Hindernisse eingeschränkt wird.

45 Die sieben Punkte

Wie muss man sieben Punkte anordnen, so dass jede beliebige Auswahl von drei Punkten die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks bildet?

46 Eine Parallelprojektion

Bei einer Dreitafel- oder Parallelprojektion schaut man von oben, von vorne und von der Seite auf das Objekt, das man abbilden will.

Die beiden Zeichnungen dieser Aufgabe geben die Vorderansicht und die Seitenansicht eines Körpers wieder. Wie es bei einer technischen Zeichnung üblich ist, sind die sichtbaren Kanten durch ausgezogene Linien und die unsichtbaren Kanten, sofern sie nicht durch sichtbare verdeckt werden, durch gestrichelte Linien dargestellt. In den beiden Ansichten hat der Körper also keine nicht abgedeckten unsichtbaren Kanten.



Wie könnte der Körper aussehen?

47 Große Zahlen

Ordnen Sie die Exponentialzahlen 2^{55} , 3^{44} , 4^{33} , 5^{22} nach ihrer Größe, ohne dabei einen Taschenrechner oder einen Computer zu benutzen!

48 Der Wert 1

Bilden Sie einen arithmetischen Ausdruck, der den Wert 1 hat, in dem jede der zehn Ziffern genau einmal vorkommt, und der trotzdem keine weiteren mathematischen Symbole enthält.

49 Volumen und Oberfläche

Eine Kugel mit dem Durchmesser d hat ein Volumen von

$$V_K = \frac{1}{6} \pi d^3$$

und eine Oberfläche von

$$A_K = \frac{1}{6} \pi d^2.$$

Das Verhältnis von Oberfläche und Volumen ergibt also

$$\frac{A_K}{V_K} = \frac{6}{d}.$$

Bei einem Würfel der Kantenlänge d beträgt das Volumen

$$V_W = d^3$$

und die Oberfläche

$$A_W = 6d^2$$

und somit der Oberfläche-Volumen-Quotient

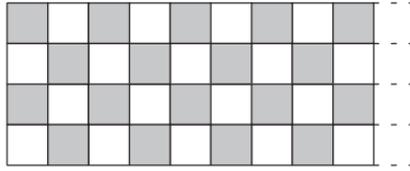
$$\frac{A_W}{V_W} = \frac{6}{d}.$$

Folglich ist bei beiden Körpern das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen gleich.

In jedem Schulbuch über elementare Geometrie kann man nachlesen, dass unter allen denkbaren Körpern, die das gleiche Volumen haben, die Kugel die kleinste Oberfläche hat. Wie ist es darum zu erklären, dass die Oberfläche-Volumen-Quotienten bei der Kugel und beim Würfel gleich sind?

50 Die Rundtour des Springers

Kann ein Springer, der auf einem $4 \times n$ -Schachbrett steht, $4n$ aufeinanderfolgende Züge machen und dabei jedes Feld genau einmal betreten und zum Schluss zum Ausgangsfeld zurückkehren?



Die Größe n kann eine beliebige positive ganze Zahl sein. Selbstverständlich sind nur die beim Schach üblichen Züge für den Springer erlaubt.

51 Das Problem des Händeschüttelns

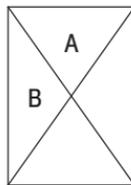
Herr und Frau Wiener haben zu ihrer Gartenparty drei Ehepaare eingeladen. Einige der Gäste begrüßen sich und das Ehepaar Wiener mit einem Handschlag, andere nicken sich nur zu. Dabei schüttelt keiner seinem Ehepartner und keiner jemandem mehrmals die Hand. Natürlich gibt sich auch niemand selbst die Hand.

Am Ende des Abends fragt Herr Wiener jeden seiner Gäste und auch seine Frau, wie viele Hände sie geschüttelt haben. Zu seiner Überraschung sind alle Antworten verschieden.

Wie vielen Gästen hat Frau Wiener die Hand gegeben?

52 Das geteilte Blatt

Ein DIN-A4-Blatt, dessen Seiten 297 und 210 Millimeter lang sind, wird entlang seiner beiden Diagonalen geknickt. Es entstehen dabei vier Dreiecke.



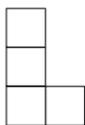
In welchem Verhältnis stehen die Flächen des spitz- (A) und des stumpfwinkligen (B) Dreiecks?

53 Tetrominos

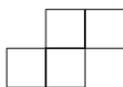
Tetrominos sind flache Plättchen, die aus jeweils vier gleichen, an den Kanten zusammenhängenden Quadraten bestehen. Es gibt insgesamt fünf Tetrominos.



gerades
Tetromino



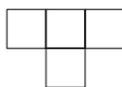
L-Tetromino



Treppen-
tetromino

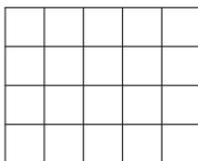


quadratisches
Tetromino



T-Tetromino

Kann man die fünf Tetrominos zu einem Rechteck zusammensetzen, das aus 5×4 Quadraten besteht? Wenn ja, wie viele verschiedene Lösungen gibt es?



Die Tetrominos dürfen auch umgeklappt werden, das heißt es dürfen auch ihre Spiegelbilder benutzt werden.

54 Die Händedrücke

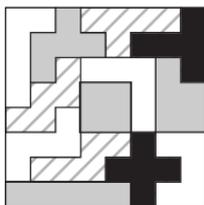
Jeder Mensch, der jemals auf der Welt lebte, hat in seinem Leben eine bestimmte Zahl Händedrücke gewechselt. Die Anzahl der Menschen, die eine ungerade Zahl Hände gedrückt haben, ist gerade.

Warum?

55 Das Färben von Landkarten

Auf Landkarten werden gewöhnlich verschiedene Länder unterschiedlich gefärbt. Dabei ist es normalerweise nicht nötig, für jedes Land eine andere Farbe zu nehmen, sondern es genügt, wenn benachbarte Länder, also Länder, die eine gemeinsame Grenzlinie ha-

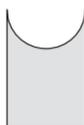
ben, verschieden gefärbt sind. Eine solche Färbung wird in der Mathematik regulär genannt.



In dem berühmten Vier-Farben-Problem wurde vermutet, dass man jede beliebige Landkarte, egal wie kompliziert die Form ihrer Länder ist, mit höchstens vier Farben regulär färben kann. Über hundert Jahre wurde nach einem Beweis für diese Vermutung oder nach einem Gegenbeispiel gesucht, aber erst im Jahre 1977 gelang es den Mathematikern Wolfgang Haken und Kenneth Appel mit einem riesigen Computeraufwand zu beweisen, dass wirklich vier Farben ausreichen.



konvexes Land



nicht konvexes Land

Ein Land ist konvex, wenn es keine Einbuchtungen in seiner Grenze hat, oder mathematisch präziser formuliert, wenn für jedes Punktepaar in seinem Inneren die Verbindungsstrecke nur durch das Land selbst verläuft.

Kann man jede Landkarte, die nur aus konvexen Ländern besteht, mit höchstens drei Farben regulär färben?

56 Die vertauschten Uhrzeiger

Bei einer Uhr hat jemand heimlich Stunden- und Minutenzeiger gegeneinander vertauscht. Wenn man dies nicht weiß, müssen einem die meisten Zeigerstellungen unsinnig erscheinen. Doch in einigen Fällen ist es möglich, dass, wenn auch meistens die falsche Zeit angezeigt wird, die Stellung der beiden Zeiger auch bei einer Uhr mit unvertauschten Zeigern auftreten könnte.

Wie viele dieser Zeigerstellungen gibt es?