Heinrich Hemme
Das große Buch der mathematischen Rätsel

Heinrich Hemme

Das große Buch der mathematischen Rätsel

Anaconda

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Penguin Random House Verlagsgruppe FSC® N001967

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Umschlagmotive: Thinkstock
Umschlaggestaltung: pecher und soiron, Köln
Satz und Layout: Andreas Paqué, www.paque.de
Druck und Bindung: CPI Books GmbH, Leck
ISBN 978-3-7306-0007-8
www.anacondaverlag.de

Vorwort

Seit der Mensch denken kann, stellt und löst er Rätsel. Im antiken Griechenland erzählte man sich die Geschichte der Sphinx, einem Ungeheuer, das halb Frau und halb Löwe war und vor den Toren der Stadt Theben hauste. Die Sphinx gab jedem Wanderer, der vorüber kam, Rätsel auf und fraß diejenigen, die die Antwort nicht wussten. Eines Tages kam auch Ödipus, der Sohn des Königs Laios, an dem Felsen der Sphinx vorbei. Das Ungeheuer stellte ihm ein Rätsel, von dem es glaubte, dass es niemand lösen könne. „Welches Wesen geht am Morgen auf vier, am Mittag auf zwei und am Abend auf drei Beinen?“ Ödipus dachte nach und sagte dann: „Es ist der Mensch, der in seiner Kindheit auf allen Vieren kriecht, als Erwachsener auf beiden Beinen geht und im Alter einen Stock zur Hilfe nehmen muss.“ Das Rätsel war richtig gelöst, und die Sphinx stürzte sich aus Ärger in den Abgrund, und Ödipus wurde König von Theben.

Die Rätsel des vorliegenden Buches sind zumeist mathematischer Natur, und keiner wird gefressen, der sie nicht löst. Die Aufgaben sind verschieden schwierig. Manche sind nur mathematische Scherze, andere verlangen Grundkenntnisse in Algebra, Geometrie und Zahlentheorie. Bis auf wenige Ausnahmen reichen jedoch die normale Schulmathematik und der gesunde Menschenverstand aus, um die Probleme zu knacken.

Ich habe mich bemüht, die Geschichte der einzelnen Probleme so weit wie möglich zurückzuverfolgen, um ihre Erfinder zu entdecken. Dies war ein sehr schwieriges, ja fast unmögliches Unterfangen, weil kaum ein Autor eines Rätselbuches oder -artikels jemals angibt, woher er seine Aufgaben hat. Ich habe bei jedem Problem die älteste Quelle, die ich gefunden habe, angegeben. Ob dies auch immer der Erfinder des Problems ist, bleibt allerdings sehr fraglich, ja sogar unwahrscheinlich.

Heinrich Hemme
Roetgen, 2013

Inhalt

Aufgaben

1 Springerzüge

Jedes der fünfundzwanzig Felder eines 5×5-Schachbretts ist mit einem Springer besetzt. Mit allen fünfundzwanzig Figuren soll gleichzeitig ein Zug gemacht werden; anschließend muss auf jedem Feld wieder ein Springer stehen. Es sind natürlich nur die beim Schach üblichen Springerzüge erlaubt.

Wie müssen die einzelnen Züge aussehen? Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?

2 Der runde See

Ein Mann steht am Ufer eines kreisrunden Sees. Er springt in das Wasser und schwimmt genau nach Norden. Nach sechzig Metern trifft er wieder auf das Ufer. Dort ändert er seine Richtung, schwimmt nach Osten und erreicht nach achtzig Metern erneut das Ufer.

Welchen Durchmesser hat der See?

3 Sockenprobleme

In einem Korb werden rote, in einem zweiten grüne und in einem dritten rote und grüne Socken aufbewahrt. Auf den Deckeln der Körbe sind Schilder, auf denen ihr Inhalt verzeichnet ist. Leider wurden alle Deckel vertauscht, so dass kein Korb mehr richtig beschriftet ist.

Sie dürfen nacheinander in die Körbe greifen und jeweils eine Socke herausnehmen, ohne sich dabei den Rest des Inhalts anzusehen.

Wie viele Socken müssen Sie mindestens aus den Körben nehmen, um alle Deckel wieder richtig zuordnen zu können? In welche Körbe müssen Sie greifen?

4 Die Teilung des Kuchens

Tante Gertrud ist zu Besuch gekommen. Sie hat ihrem Neffen und ihrer Nichte einen Kuchen gebacken. „Teilt ihn euch gerecht auf!“, sagt sie und gibt Alfred den Kuchen.

Wie können Alfred und Berta Streitereien vermeiden und den Kuchen so teilen, dass beide davon überzeugt sind, mindestens die Hälfte bekommen zu haben?

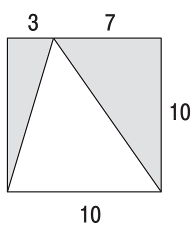
5 Die Schnecke und die Fahnenstange

Eine Schnecke beginnt eines Tages im Morgengrauen eine 17,5 Meter hohe Fahnenstange hinauf zu kriechen. Sie schafft am Tag 5,25 Meter, rutscht aber in der Nacht, wenn sie schläft, wieder um 3,50 Meter herunter.

Wann erreicht die Schnecke die Spitze der Fahnenstange?

6 Die Ecken des Quadrats

Von einem Quadrat mit einer Kantenlänge von zehn Zentimetern sind zwei Ecken abgeschnitten worden. Die genauen Maße gehen aus der Skizze hervor.



Wie groß ist die Fläche der beiden abgeschnittenen grauen Stücke zusammen?

7 Ein Problem für Biertrinker

Diese Aufgabe ist für alle mathematisch interessierten Biertrinker gedacht und dürfte für jeden Stammtisch geeignet sein.

Ein halbvolles Glas Bier ist bekanntlich das Gleiche wie ein halbleeres Glas Bier. Mathematisch ausgedrückt heißt das:

$\frac{1}{2}$ volles Glas Bier = $\frac{1}{2}$ leeres Glas Bier

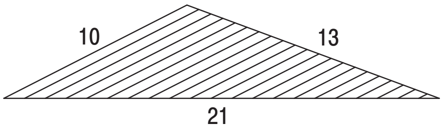
Wenn man beide Seiten der Gleichung mit 2 multipliziert, so ergibt sich daraus:

1 volles Glas Bier = 1 leeres Glas Bier

Was ist falsch?

8 Dreieckslinien

In einem Dreieck mit den Seitenlängen 10, 13 und 21 Zentimeter sind zwanzig Linien eingezeichnet, die alle parallel zur kürzesten Dreiecksseite verlaufen und die das Dreieck in einundzwanzig gleichbreite Streifen zerteilen.



Wie groß ist die Gesamtlänge dieser Linien?

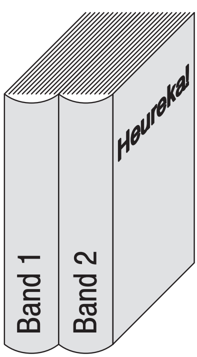
9 Freitag, der 13.

Wie viele Freitage, die auf einen 13. fallen, gibt es mindestens und wie viele höchstens in einem Jahr?

10 Ein rechtwinkliges Zwölfeck

Bei einem gleichseitigen Zwölfeck können nicht alle benachbarten Seiten rechtwinklig aufeinander stoßen. Versuchen Sie, diese Behauptung zu beweisen!

11 Der Bücherwurm



Ein Bücherfreund kauft sich ein neues zweibändiges Werk. Er schlägt den Einbanddeckel des ersten Bandes auf, schreibt seinen Namen auf das Vorsatzblatt, schließt das Buch wieder und stellt beide Bände ordnungsgemäß in sein Regal.

Beim Schreiben des Namens ist unbemerkt ein Bücherwurm zwischen den Einbanddeckel und die erste Seite gefallen. Der Wurm beginnt sofort zu nagen. Er braucht zum Durchfressen eines Blattes einen Tag und eines Einbanddeckels drei Tage. Jeder der beiden Bände hat zweihundert Seiten.

Wie lange braucht der Bücherwurm, bis er auf den hinteren Einbanddeckel des zweiten Bandes stößt?

12 Das Zweieurostück

Ein Zweieurostück hat einen Durchmesser von 25,75 Millimetern. Wie groß muss ein kreisförmiges Loch in einem Blatt Papier mindestens sein, damit man diese Münze dort hindurchstecken kann?

13 Zwei Freundinnen

Ein junger Mann hat zwei Freundinnen, eine blonde und eine schwarzhaarige. Er wohnt in der Innenstadt, seine blonde Freundin in einem nördlichen und seine schwarzhaarige in einem südlichen Vorort.

In der Nähe der Wohnung des jungen Mannes liegt eine U-Bahnstation, von der alle zehn Minuten ein Zug nach Norden geht, und auch die Züge nach Süden fahren mit jeweils zehn Minuten Abstand.

Jeden Tag besucht der junge Mann eine seiner Freundinnen. Da er beide Mädchen gleich gerne mag, überlässt er es dem Zufall, zu welcher er fährt. Er geht einfach irgendwann, ohne auf die Uhr zu schauen, zur U-Bahnstation und steigt in den Zug, der zuerst ankommt. Fährt dieser Zug nach Norden, besucht er seine blonde Freundin, fährt er nach Süden, besucht er das schwarzhaarige Mädchen. Trotzdem stellt er nach einigen Monaten fest, dass er neunmal so oft bei der Freundin im Norden als bei der im Süden war.

Woran kann das liegen?

14 Das magische Multiplikationsquadrat

Ein magisches Quadrat ist ein Raster aus $n \times n$ Feldern, in denen die Zahlen von 1 bis n^2 so verteilt sind, dass ihre Summen in den n Feldern jeder Zeile, jeder Spalte und der beiden Diagonalen gleich sind.

Da es ein magisches 2×2-Quadrat nicht gibt, hat das einfachste Quadrat neun Felder. Wenn man von den Varianten absieht, die durch Drehungen und Spiegelungen der Grundform entstehen, so gibt es nur ein einziges magisches 3×3-Quadrat. Die Summe in seinen Zeilen, Spalten und Diagonalen beträgt jeweils 15.

Dieses Quadrat, Loh Shu genannt, kennt man in China schon seit dem vierten vorchristlichen Jahrhundert.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Bei der normalen Art von magischen Quadraten ist die Summe der Zeilen-, Spalten- und Diagonalenelemente konstant. Kann es auch 3×3-Quadrate geben, bei denen das Produkt der Zahlen jeder Zeile, Spalte und Diagonalen gleich ist?

In den Feldern eines solchen Multiplikationsquadrates brauchen nicht die Zahlen von 1 bis 9 zu stehen. Sie dürfen irgendwelche positiven ganzen Zahlen nehmen, die jedoch alle verschieden sein müssen.

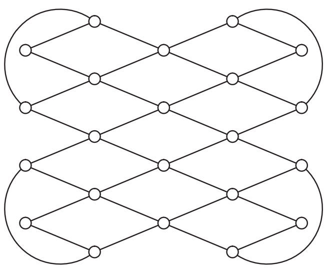
15 Quadrate, Kuben und fünfte Potenzen

Die 1 ist die kleinste positive ganze Zahl, die gleichzeitig eine Quadratzahl, eine Kubikzahl und die fünfte Potenz einer ganzen Zahl ist.

Wie heißt die zweitkleinste Zahl mit diesen Eigenschaften?

16 Der Handelsreisende

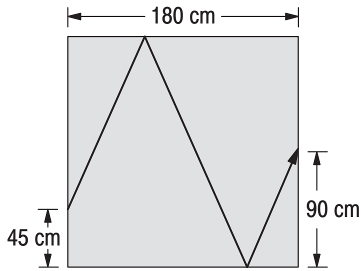
Ein Handelsreisender muss zweiundzwanzig Städte besuchen. Damit er zum Wochenende wieder pünktlich zu Hause ist, möchte er durch keine Stadt mehr als einmal fahren. Dabei darf er natürlich nur die auf der Karte eingezeichneten Straßen benutzen.



Ist eine solche Rundtour möglich, und wenn ja, in welcher Stadt muss er seine Reise beginnen, und wo endet sie?

17 Der Billardtisch

Auf einem quadratischen Billardtisch, der eine Seitenlänge von 1,80 m hat, liegt direkt an der Bande, 45 cm von der vorderen linken Ecke entfernt, eine Kugel. Sie soll durch den in der Abbildung gezeigten Zweibandenstoß zur Mitte der gegenüberliegenden Bande rollen.



An welchen Stellen trifft die Kugel die hintere und die vordere Bande, wenn der Ausfallswinkel bei der Reflexion gleich dem Einfallswinkel ist?

18 Rationale und irrationale Zahlen

Zahlen, die sich auch als Bruch schreiben lassen, wie zum Beispiel $0{,}5 = \frac{1}{2}$ oder $0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$, nennt man rationale Zahlen. Alle anderen Zahlen, wie beispielsweise $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, $\pi = 3{,}1415\ldots$ oder $e = 2{,}7182\ldots$ heißen irrationale Zahlen. Beide Zahlenarten zusammen bilden die Menge der reellen Zahlen.

Wenn man eine irrationale Zahl mit einer zweiten irrationalen Zahl potenziert, erhält man in der Regel als Ergebnis wieder eine irrationale Zahl. Muss das immer so sein, oder kann das Ergebnis in manchen Fällen auch eine rationale Zahl sein?

19 Der Treffpunkt

Zwei Freunde essen jeden Mittag im selben Restaurant. Jeder der beiden geht jeden Tag irgendwann zwischen zwölf und dreizehn Uhr in das Lokal, bleibt dort immer genau eine halbe Stunde zum Essen und verlässt es dann wieder.

Wenn die beiden Eintreffpunkte der Freunde völlig zufällig irgendwann zwischen zwölf und dreizehn Uhr liegen, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich treffen?

20 Das Zersägen eines Schachbretts

Ein Tischler soll ein Schachbrett mit einer Kreissäge, mit der man nur gerade Schnitte ausführen kann, entlang der Feldgrenzen in die vierundsechzig einzelnen Quadrate zerlegen. Er darf nach jedem Schnitt die entstandenen Teile beliebig übereinanderlegen und dann gleichzeitig durchsägen.

Wie oft muss er mindestens sägen?

21 Der Schnellrechner

Der große deutsche Mathematiker, Physiker und Astronom Carl Friedrich Gauß (1777–1855) ging als Kind in Braunschweig zur Schule.

Eines Tages – Gauß war etwa acht Jahre alt – brauchte sein Lehrer Büttner dringend für längere Zeit Ruhe, um Hefte zu korrigieren. Er stellte deshalb der Klasse die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zusammenzuzählen. Nach wenigen Minuten kam der kleine Gauß nach vorne und legte dem Lehrer seine Tafel, auf der nur eine einzige Zahl stand – das richtige Ergebnis –, aufs Pult.

Wie lautete diese Zahl, und wie hatte sie der kleine Gauß errechnet?

22 Die Weinflasche

Eine volle Flasche Wein kostet in dem Laden an der Ecke fünf Euro. Der Wein ist vier Euro mehr wert als die Flasche.

Wie hoch ist das Flaschenpfand?

23 Die fehlerhafte Ungleichung

Die Ungleichung

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

ist offensichtlich richtig. Wir logarithmieren nun beide Seiten mit der Basis ½ und erhalten:

$$\log_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \log_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$3\log_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right) < 2\log_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Da für Logarithmen das Gesetz $\log_b b = 1$ gilt, muss $3 < 2$ sein. Wo steckt der Fehler?

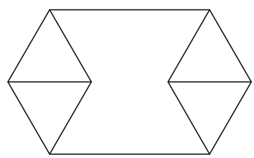
24 Bestimmungsgrößen von Dreiecken

Jedes Dreieck hat sechs Bestimmungsgrößen: drei Seiten und drei Winkel. In vielen Geometrieschulbüchern kann man lesen, dass zwei Dreiecke kongruent, das heißt, deckungsgleich sind, wenn entweder zwei Winkel und eine Seite oder ein Winkel und zwei Seiten oder alle drei Seiten gleich sind.

Kann es Dreiecke geben, bei denen die Werte von fünf Bestimmungsgrößen übereinstimmen und die trotzdem nicht kongruent oder spiegelbildlich sind?

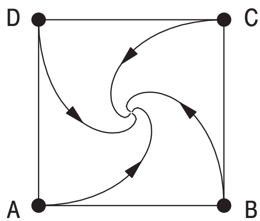
25 Das geplättete Polyeder

Das Skelett eines Polyeders wird von seinen Kanten und Ecken gebildet. Stellt man sich die Kanten als Gummifäden vor, kann man das Skelett so weit dehnen, dass es sich flach auf einem Tisch ausbreiten lässt.



Die Abbildung zeigt ein geplättetes Polyederskelett. Haben Sie ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen? Dann versuchen Sie herauszubekommen, wie der Körper ursprünglich ausgesehen hat!

26 Die vier Schnecken



Vier Schnecken – A, B, C und D – sitzen auf den Ecken eines Quadrates von einem Meter Seitenlänge. Gleichzeitig und mit gleichen

Geschwindigkeiten kriechen A auf B, B auf C, C auf D und D auf A zu. Da die Schnecken ständig ihre Richtungen ändern müssen, um immer genau aufeinander zu zu kriechen, sind ihre Bahnen Spiralen, die sich im Mittelpunkt des Quadrates treffen.

Wie lang ist der Weg jeder Schnecke bis zum Treffpunkt?

27 Lügner

Ein Junge und ein Mädchen sitzen auf einer Parkbank. „Ich bin ein Junge“, sagt das Kind mit den schwarzen Haaren. „Und ich bin ein Mädchen“, antwortet das mit den blonden Haaren. Wenigstens ein Kind lügt.

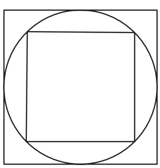
Welche Haarfarbe hat das Mädchen?

28 Ein Wurzelvergleich

Welche der Zahlen $\sqrt[10]{10}$ und $\sqrt[3]{2}$ ist größer? Versuchen Sie diese Frage zu beantworten, ohne einen Taschenrechner oder einen Computer zu benutzen.

29 Inecke und Umecke

Einem Quadrat ist ein Kreis einbeschrieben, der wiederum Umkreis eines zweiten Quadrates ist.



In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der beiden Quadrate?

30 Fakultäten

Fakultäten sind Zahlen, die sehr schnell anwachsen. So ist 13! bereits eine zehnstellige Zahl. Versuchen Sie ohne Taschenrechner, Tabelle oder viel Arbeit herauszubekommen, welche der drei folgenden Zahlen gleich 13! ist: 6 227 020 800, 6 227 028 000 oder 6 227 080 002.

31 Eine diophantische Gleichung

Eine diophantische Gleichung ist eine Gleichung, deren Lösungen ganzzahlig sein müssen. Sie haben ihren Namen von dem griechischen Mathematiker Diophantos, der um 250 n. Chr. in Alexandria lebte.

$$187x - 104y = 41$$

Für diese diophantische Gleichung sind fünf Lösungsvorschläge vorhanden: Vier davon sind richtig, einer ist falsch. Finden Sie das falsche Zahlenpaar heraus, ohne Bleistift und Papier und ohne einen Taschenrechner zu benutzen!

Lösungsvorschläge:
a) $x = 3$, $y = 5$
b) $x = 107$, $y = 192$
c) $x = 211$, $y = 379$
d) $x = 314$, $y = 565$
e) $x = 419$, $y = 753$

32 Determinanten

Die neun Ziffern von 1 bis 9 können auf 9! = 362880 verschiedene Weisen zu einer 3×3-Matrix angeordnet werden. Zu jeder dieser Matrizen gehört eine Determinante.

Wie groß ist die Summe aller 362880 Determinanten?

33 Ein mathematisches Symbol

Welches mathematische Symbol muss man zwischen die beiden Ziffern

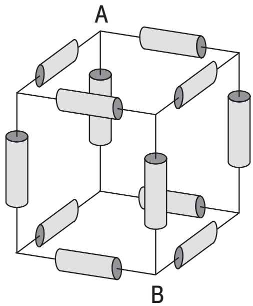
$$2 \quad 3$$

setzen, damit das Ergebnis größer als 2, aber kleiner als 3 wird? Es dürfen natürlich keine neuen Symbole erfunden werden.

34 Widerstände

Diese Aufgabe ist nicht rein mathematischer Natur, sondern gehört in den Bereich der Elektrotechnik. Die Lösung ist jedoch so elegant, dass ich nicht darauf verzichten wollte, das Problem in diese Sammlung aufzunehmen.

Das Skelett eines Würfels, das von seinen Kanten und Ecken gebildet wird, ist aus zwölf 1-Ohm-Widerständen zusammengelötet.



Wie groß ist der Gesamtwiderstand zwischen den beiden sich diagonal gegenüberliegenden Ecken A und B?

35 Die Stellenzahl

Wie viele Stellen hat die Zahl 2^{-n} in Dezimaldarstellung nach dem Komma? Die Größe n soll eine positive ganze Zahl sein.

36 Eine kuriose Zahl

Gibt es eine positive reelle Zahl, deren Fünftel mit ihrem Siebtel multipliziert die Zahl selbst ergibt?

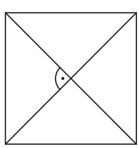
37 Die Kosinussumme

Wie groß ist die Summe der fünf Kosinus?

$$\cos 5° + \cos 77° + \cos 149° + \cos 221° + \cos 293° = ?$$

38 Diagonalen

Die Diagonalen eines Quadrates sind gleich lang und schneiden sich unter rechten Winkeln.

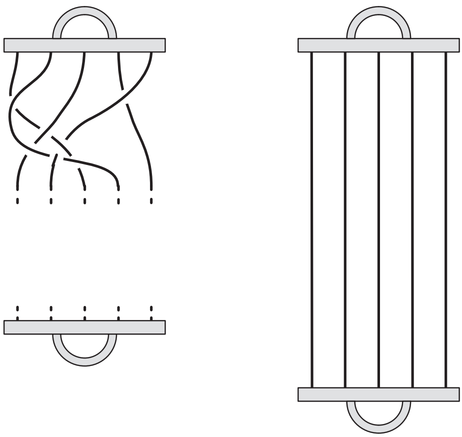


Haben auch die dreidimensionalen Analoga, die Raumdiagonalen eines Würfels, diese Eigenschaft?

39 Der verknäulte Expander

Ein Expander liegt entspannt auf dem Tisch; die fünf Gummiseile sind verknäult. Von den Seilen ist nur der obere Teil gezeichnet worden.

Ergänzen Sie die Zeichnung so, dass die fünf Seile im gestreckten Zustand des Expanders nicht verflochten sind und parallel verlaufen. In der Skizze deutet die durchbrochene Linie an einem Schnittpunkt von zwei Seilen das untere der beiden an.



40 Reihen

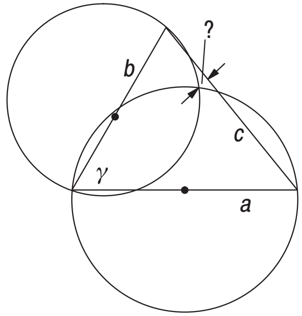
Die Zahlen dieser Reihe sind nach einem bestimmten Gesetz gebildet worden.

1, 8, 11, 69, 88, 96, 101, 111, …

Wie lautet das Gesetz, und wie heißt die nächste Zahl in der Reihe?

41 Dreieck und Kreise

Bei einem Dreieck ist die Grundseite *a* um zehn Zentimeter länger als die Seite *b*. Der von beiden Seiten eingeschlossene Winkel γ beträgt 60°. Zwei Kreise, die diese Dreiecksseiten als Durchmesser haben, schneiden sich zweimal: Einer der Schnittpunkte ist die Ecke, an der sich *a* und *b* treffen.



Wie weit ist der zweite Schnittpunkt von der dritten Dreiecksseite c entfernt?

42 Sechs Menschen

Von sechs völlig willkürlich aus der Weltbevölkerung herausgegriffenen Menschen gibt es immer drei, die sich entweder gegenseitig kennen oder die sich völlig fremd sind. Warum?

43 Teilbarkeit durch 8

Eine fünfzehnstellige Zahl soll mit dem Taschenrechner darauf untersucht werden, ob sie sich ohne Rest durch 8 teilen lässt. Leider arbeitet der Rechner nur mit acht Stellen.

Mit welchem einfachen Trick geht es trotzdem?

44 Das Pentagon

Ein Spion beobachtet mit einem Feldstecher das amerikanische Verteidigungsministerium, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Fünfeck ist. Es wird deshalb auch meistens Pentagon genannt.

Der Spion hat sein Versteck in sehr großer Entfernung vom Pentagon gewählt, und er kann darum zwei oder drei Seiten des Gebäudes sehen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er drei Seiten des Pentagons sehen kann, wenn er seine Position völlig zufällig auswählt? Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, dass seine Sicht nicht durch Häuser, Bäume, Berge oder irgendwelche anderen Hindernisse eingeschränkt wird.

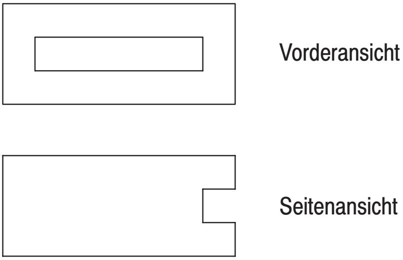
45 Die sieben Punkte

Wie muss man sieben Punkte anordnen, so dass jede beliebige Auswahl von drei Punkten die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks bildet?

46 Eine Parallelprojektion

Bei einer Dreitafel- oder Parallelprojektion schaut man von oben, von vorne und von der Seite auf das Objekt, das man abbilden will.

Die beiden Zeichnungen dieser Aufgabe geben die Vorderansicht und die Seitenansicht eines Körpers wieder. Wie es bei einer technischen Zeichnung üblich ist, sind die sichtbaren Kanten durch ausgezogene Linien und die unsichtbaren Kanten, sofern sie nicht durch sichtbare verdeckt werden, durch gestrichelte Linien dargestellt. In den beiden Ansichten hat der Körper also keine nicht abgedeckten unsichtbaren Kanten.



Wie könnte der Körper aussehen?

47 Große Zahlen

Ordnen Sie die Exponentialzahlen 2^{55}, 3^{44}, 4^{33}, 5^{22} nach ihrer Größe, ohne dabei einen Taschenrechner oder einen Computer zu benutzen!

48 Der Wert 1

Bilden Sie einen arithmetischen Ausdruck, der den Wert 1 hat, in dem jede der zehn Ziffern genau einmal vorkommt, und der trotzdem keine weiteren mathematischen Symbole enthält.

49 Volumen und Oberfläche

Eine Kugel mit dem Durchmesser d hat ein Volumen von

$$V_{\mathrm{K}} = \frac{1}{6}\,\pi d^3$$

und eine Oberfläche von

$$A_{\mathrm{K}} = \frac{1}{6}\,\pi d^2.$$

Das Verhältnis von Oberfläche und Volumen ergibt also

$$\frac{A_{\mathrm{K}}}{V_{\mathrm{K}}} = \frac{6}{d}.$$

Bei einem Würfel der Kantenlänge d beträgt das Volumen

$$V_{\mathrm{W}} = d^3$$

und die Oberfläche

$$A_{\mathrm{W}} = 6d^2$$

und somit der Oberfläche-Volumen-Quotient

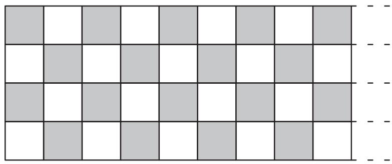
$$\frac{A_{\mathrm{W}}}{V_{\mathrm{W}}} = \frac{6}{d}.$$

Folglich ist bei beiden Körpern das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen gleich.

In jedem Schulbuch über elementare Geometrie kann man nachlesen, dass unter allen denkbaren Körpern, die das gleiche Volumen haben, die Kugel die kleinste Oberfläche hat. Wie ist es darum zu erklären, dass die Oberfläche-Volumen-Quotienten bei der Kugel und beim Würfel gleich sind?

50 Die Rundtour des Springers

Kann ein Springer, der auf einem $4 \times n$-Schachbrett steht, $4n$ aufeinanderfolgende Züge machen und dabei jedes Feld genau einmal betreten und zum Schluss zum Ausgangsfeld zurückkehren?



Die Größe n kann eine beliebige positive ganze Zahl sein. Selbstverständlich sind nur die beim Schach üblichen Züge für den Springer erlaubt.

51 Das Problem des Händeschüttelns

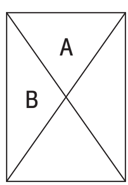
Herr und Frau Wiener haben zu ihrer Gartenparty drei Ehepaare eingeladen. Einige der Gäste begrüßen sich und das Ehepaar Wiener mit einem Handschlag, andere nicken sich nur zu. Dabei schüttelt keiner seinem Ehepartner und keiner jemandem mehrmals die Hand. Natürlich gibt sich auch niemand selbst die Hand.

Am Ende des Abends fragt Herr Wiener jeden seiner Gäste und auch seine Frau, wie viele Hände sie geschüttelt haben. Zu seiner Überraschung sind alle Antworten verschieden.

Wie vielen Gästen hat Frau Wiener die Hand gegeben?

52 Das geteilte Blatt

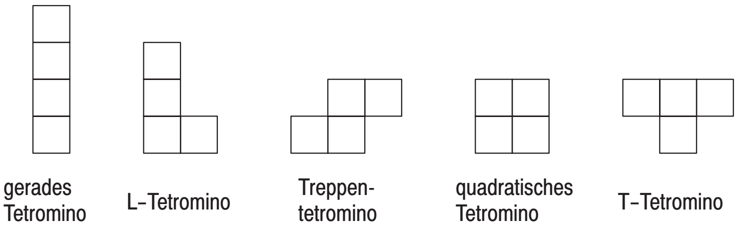
Ein DIN-A4-Blatt, dessen Seiten 297 und 210 Millimeter lang sind, wird entlang seiner beiden Diagonalen geknickt. Es entstehen dabei vier Dreiecke.



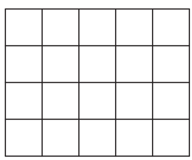
In welchem Verhältnis stehen die Flächen des spitz- (A) und des stumpfwinkligen (B) Dreiecks?

53 Tetrominos

Tetrominos sind flache Plättchen, die aus jeweils vier gleichen, an den Kanten zusammenhängenden Quadraten bestehen. Es gibt insgesamt fünf Tetrominos.



Kann man die fünf Tetrominos zu einem Rechteck zusammensetzen, das aus 5×4 Quadraten besteht? Wenn ja, wie viele verschiedene Lösungen gibt es?



Die Tetrominos dürfen auch umgeklappt werden, das heißt es dürfen auch ihre Spiegelbilder benutzt werden.

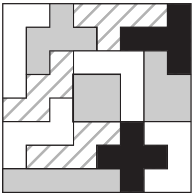
54 Die Händedrücke

Jeder Mensch, der jemals auf der Welt lebte, hat in seinem Leben eine bestimmte Zahl Händedrücke gewechselt. Die Anzahl der Menschen, die eine ungerade Zahl Hände gedrückt haben, ist gerade.

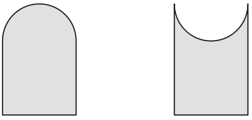
Warum?

55 Das Färben von Landkarten

Auf Landkarten werden gewöhnlich verschiedene Länder unterschiedlich gefärbt. Dabei ist es normalerweise nicht nötig, für jedes Land eine andere Farbe zu nehmen, sondern es genügt, wenn benachbarte Länder, also Länder, die eine gemeinsame Grenzlinie haben, verschieden gefärbt sind. Eine solche Färbung wird in der Mathematik regulär genannt.



In dem berühmten Vier-Farben-Problem wurde vermutet, dass man jede beliebige Landkarte, egal wie kompliziert die Form ihrer Länder ist, mit höchstens vier Farben regulär färben kann. Über hundert Jahre wurde nach einem Beweis für diese Vermutung oder nach einem Gegenbeispiel gesucht, aber erst im Jahre 1977 gelang es den Mathematikern Wolfgang Haken und Kenneth Appel mit einem riesigen Computeraufwand zu beweisen, dass wirklich vier Farben ausreichen.



Ein Land ist konvex, wenn es keine Einbuchtungen in seiner Grenze hat, oder mathematisch präziser formuliert, wenn für jedes Punktepaar in seinem Inneren die Verbindungsstrecke nur durch das Land selbst verläuft.

Kann man jede Landkarte, die nur aus konvexen Ländern besteht, mit höchstens drei Farben regulär färben?

56 Die vertauschten Uhrzeiger

Bei einer Uhr hat jemand heimlich Stunden- und Minutenzeiger gegeneinander vertauscht. Wenn man dies nicht weiß, müssen einem die meisten Zeigerstellungen unsinnig erscheinen. Doch in einigen Fällen ist es möglich, dass, wenn auch meistens die falsche Zeit angezeigt wird, die Stellung der beiden Zeiger auch bei einer Uhr mit unvertauschten Zeigern auftreten könnte.

Wie viele dieser Zeigerstellungen gibt es?