David Acheson

Die Calculus-Story

Ein mathematisches Abenteuer

Aus dem Englischen von
Regina Schneider

Mit einem Vorwort von
Heinrich Hemme

Anaconda

Titel der englischen Originalausgabe:
The Calculus Story. A Mathematical Adventure
Oxford: Oxford University Press 2017

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Lizenzausgabe mit freundlicher Genehmigung

Umschlagmotiv: OUP © drawn by Robert Calow
Umschlaggestaltung: www.dya.de, dyadesign, Düsseldorf, nach dem Entwurf der englischen Originalausgabe
Satz und Layout: InterMedia – Lemke e. K., Ratingen
Printed in Czech Republic 2018
ISBN 978-3-7306-0626-1
www.anacondaverlag.de
info@anacondaverlag.de

Inhalt

Vorwort

Die Unendlichkeit fasziniert Philosophen, Wissenschaftler und Theologen seit Menschengedenken. Schon in der Antike dachten griechische Mathematiker darüber nach, was unendlich groß, unendlich viel und unendlich klein bedeuten könnte. Im 5. vorchristlichen Jahrhundert beschrieb Zenon von Elea ein paradoxes Wettrennen zwischen Achilles und einer Schildkröte. Achilles gab der Schildkröte zehn Schritte Vorsprung, und bevor er sie überholen konnte, musste er zuerst ihren Vorsprung aufholen. In der Zeit, die er dafür benötigte, hatte die Schildkröte aber einen neuen, wenn auch kleineren Vorsprung gewonnen, den Achilles ebenfalls erst aufholen musste. War ihm auch das gelungen, hatte die Schildkröte wiederum einen, wenn auch noch kleineren, Vorsprung gewonnen, und so ging das immer weiter. Zenon behauptete nun, der Vorsprung, den die Schildkröte hatte, würde zwar immer kleiner, bliebe aber immer ein Vorsprung, sodass Achilles sich der Schildkröte zwar immer weiter näherte, sie aber niemals einholen und somit auch nicht überholen konnte.

Die Unendlichkeit ist ein schönes, aber stolzes und wildes Tier, das die Mathematiker in seinen Bann zog, sich aber jahrtausendelang nicht bezwingen ließ. Erst im 17. Jahrhundert gelang es einigen Geistesgrößen sie zu zähmen und für die Arbeit in der Mathematik, den Naturwissenschaften und der Technik einzuspannen. Die Geometrie und die Algebra sind bereits seit der

Antike die beiden großen klassischen Teilgebiete der Mathematik. Ab der Spätantike bis ins Mittelalter galten sie als zwei der sieben freien Künste. Nach der Domestizierung der Unendlichkeit kam im 18. Jahrhundert dann noch als drittes großes Teilgebiet die Analysis hinzu, die das Unendliche als Arbeitstier nutzt. Das Wort Analysis = ανάλυσις, das aus dem Griechischen kommt und auf dem zweiten a betont wird, bedeutet Auflösung. Ihre zentralen Begriffe sind der Grenzwert, die unendliche Reihe und die Funktion. Was in der Mathematik alles zur Analysis zählt und was nicht, ist nur unscharf umrissen. Auf jeden Fall gehören die Differentialrechnung, die Integralrechnung, die Differentialgleichungen, die Variationsrechnung, die Vektoranalysis und die Funktionalanalysis dazu. Die Analysis wurde von dem Deutschen Gottfried Wilhelm Leibniz und dem Engländer Isaac Newton gleichzeitig und unabhängig voneinander als Infinitesimalrechnung entwickelt, einer Technik, mit der man Differential- und Integralrechnung betreiben kann. Die Infinitesimalrechnung liefert eine Methode, eine Funktion auf unendlich kleinen Abschnitten widerspruchsfrei zu beschreiben. Daher rührt auch der Name, der von dem Adjektiv infinitesimal stammt, was »unendlich klein« bedeutet und aus dem lateinischen Begriff *infinitus* = unendlich gebildet wurde.

David Acheson nimmt Sie in diesem Buch mit auf eine Reise durch die fast viertausendjährige Geschichte der Analysis. Sie beginnt in Mesopotamien, als dort um 1700 v. Chr. babylonische Wissenschaftler geometrische Figuren und Berechnungen in Keilschrifttäfelchen ritzten, und geht dann weiter nach Griechenland, wo in der

Antike Mathematiker die ersten zaghaften Versuche mit dem Unendlichen wagten, die manchmal von Erfolg gekrönt wurden, aber meistens zu Widersprüchen führten. Danach führt die Reise ins Europa der Renaissancezeit, wo das Unendliche schließlich gezähmt wurde und endet am Schluss des Buches in der weltweiten Gegenwart. Acheson erzählt, wie die Mathematiker auf die Idee des Grenzwertes kamen und wie sie ihn bei unendlichen Reihen ermitteln konnten, wie sie die Steigung von Kurven berechnen lernten, wie sie die Verfahren des Differenzierens entwickelten, wie es ihnen gelang, Maximal- und Minimalwerte zu bestimmen, wie sie lernten, die Inhalte von Flächen und Körpern mit gekrümmten Rändern zu berechnen, und wie sie dafür die Methode des Integrierens konstruierten. Er erzählt, wie Wissenschaftler die Mathematik des Unendlichen mit großem Erfolg auf die Bahnen der Planeten anwendeten und dafür die Verfahren der Differentialgleichungen schufen, wie sie die Variationsrechnung entwickelten, mit der sich viele bis dahin unlösbare Probleme der Physik lösen ließen. Acheson zeigt die fruchtbare Verbindung zwischen den allgegenwärtigen harmonischen Schwingungen und Wellen und der Analysis, die von den Gitarrensaiten über die Fourierreihen und die Quantenmechanik bis zur Chaostheorie führt.

Im Englischen wird sowohl die Analysis als auch die Infinitesimalrechnung mit dem lateinischen Wort *calculus* bezeichnet. Dies ist die Verkleinerungsform des Wortes *calx* = Kieselstein. Ein *calculus* ist also ein Kieselsteinchen. Wenn in der Antike den Römern beim Rechnen die Zahlen so groß wurden, dass die zehn Finger nicht mehr ausreichten, nahmen sie *calculi* zur Hilfe. Später erweiterte sich die Bedeutung des Begriffs ein wenig und jeder Rechenstein hieß *calculus*, egal wie er geformt war, aus welchem Material er bestand oder ob er auf einen Stab eines Abakus gefädelt wurde. Ein Rechenstein wird in der modernen Welt nicht mehr benutzt, aber sein lateinischer Name ist nicht verloren gegangen. In den Wörtern Kalkulation und Kalkül lebt er weiter und in der englischsprachigen Welt ist sogar ein ganzes Teilgebiet der Mathematik auf seinen Namen getauft worden.

David Acheson hat das englische Original dieses Buches *The Calculus Story* genannt. Korrekt übersetzt müsste die deutsche Ausgabe als Titel den Zungenbrecher *Die Analysis- und Infinitesimalrechnungsgeschichte* tragen. Aber wer gibt schon seinem schönen Kind einen hässlichen Namen? Deshalb bleibt es auch in der deutschen Ausgabe bei dem wohlklingenden lateinisch-englischen Titel *Calculus-Story* und der Begriff wird auch im Text durchgängig verwendet.

Heinrich Hemme
Aachen, April 2018

1

Einführung

Im Sommer 1666 sah Isaac Newton in seinem Garten einen Apfel vom Baum fallen und ersann umgehend die Gravitationstheorie.

Soweit die Legende.

Zugegeben, eine stark vereinfachte Darstellung der Ereignisse, gleichwohl aber ein schöner Ausgangspunkt für eine kurze Einführung in den Calculus.

Denn der Apfel wird im Fallen *schneller*, seine *Geschwindigkeit* erhöht sich.

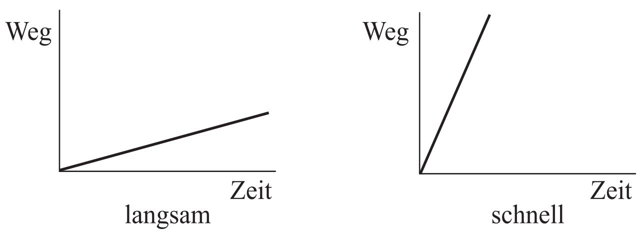
1. Newton und der Apfel

Doch was genau verstehen wir unter der Geschwindigkeit des Apfels zu jedem beliebigen Zeitpunkt?

$$Geschwindigkeit = \frac{Weg}{Zeit}$$

Nun gilt diese Formel aber nur, wenn die Geschwindigkeit einer Bewegung konstant ist, das heißt, wenn der Weg proportional zur Zeit ist.

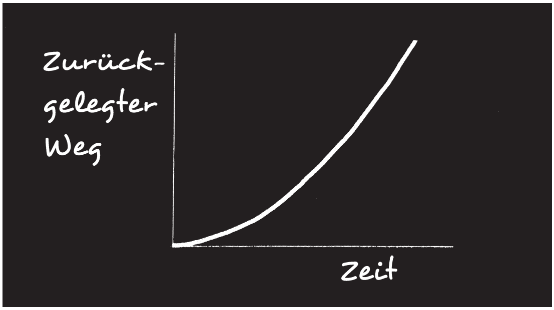
Oder anders ausgedrückt: Die Formel gilt nur, wenn der Graph im Weg-Zeit-Diagramm eine Gerade ist, deren Steigung bzw. Steilheit dann die Geschwindigkeit abbildet (Abb. 2).



2. Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit

Bei einem fallenden Apfel jedoch ist der Weg nicht proportional zur Zeit. Wie Galileo entdeckt hat, ist der im Fallen zurückgelegte Weg direkt proportional zum Quadrat der dafür benötigten Zeit.

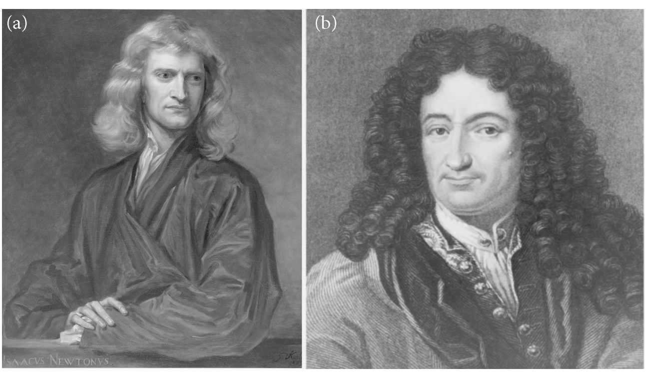
Nach einer bestimmten Zeit also hat der fallende Apfel einen bestimmten Weg zurückgelegt, doch nach zweimal so viel Zeit ist er nicht etwa zweimal so weit gefallen, sondern viermal so weit, denn $2^2 = 4$. Tragen wir nun den zurückgelegten Weg als Funktion der Zeit auf, erhalten wir eine nach oben gebogene Kurve (Abb. 3).



3. So fällt ein Apfel.

Vereinfacht gesagt stellt der zunehmend steilere Verlauf der Kurve die zunehmende Geschwindigkeit dar, mit welcher der Apfel im Zeitablauf fällt.

Und genau diese Idee von der zunehmenden Geschwindigkeit, mit der sich die Dinge im Zeitablauf



4. (a) Isaac Newton (1642–1727)
(b) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

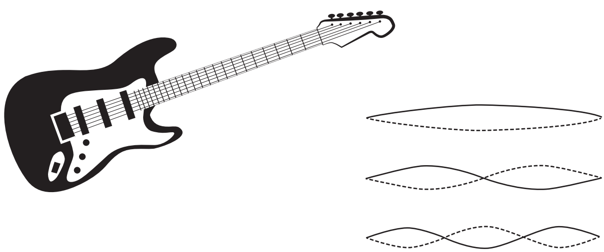
verändern, ist eine der wichtigsten Leitideen des mathematischen Calculus.

Im Calculus, so heißt es bisweilen, drehe sich alles um *Veränderung*, präziser aber müsste es heißen, dass es um die Rate geht, mit der sich Dinge verändern.

In den Mittelpunkt des Interesses rückte das Thema in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts, vor allem durch die Arbeiten von Isaac Newton in England und von Gottfried Wilhelm Leibniz in Deutschland.

Die beiden sind sich zeitlebens nie begegnet, pflegten aber eine zurückhaltende (und indirekte) Korrespondenz, die anfangs sehr freundlich und respektvoll war, dann aber in einen heftigen Prioritätsstreit darüber ausartete, wer von beiden den Calculus ›erfunden‹ hatte. Mehr dazu später, allerdings geht es in diesem Buch hauptsächlich um den Calculus an sich.

Insbesondere will ich einen Überblick über das ›große Ganze‹ geben, mich auf grundlegende Ideen des Calculus konzentrieren und deren geschichtliche Hintergründe beleuchten.



5. Schwingungen einer Gitarrensaite

Wir werden außerdem erfahren, inwiefern der Calculus in der Physik und anderen Naturwissenschaften von elementarer Bedeutung ist.

Und wir werden versuchen, die Theorie des Calculus so weit zu erhellen, dass wir zum Beispiel verstehen, was es mit den Schwingungen einer Gitarrensaite auf sich hat (Abb. 5).

Überdies werde ich immer mal wieder Fälle herausstellen, wo uns die Rechenergebnisse des Calculus an sich Vergnügen bereiten, unabhängig von ihrer praktischen Anwendbarkeit.

Abb. 6 zum Beispiel zeigt einen außergewöhnlichen Zusammenhang zwischen der Kreiszahl Pi (π) und den ungeraden Zahlen.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

6. Ein erstaunlicher Zusammenhang

Warum dieses Ergebnis zutrifft, werde ich zu gegebener Zeit an anderer Stelle aufzeigen.

Kurzum, dieses kleine Buch ist ambitionierter, als es zunächst den Anschein hat.

Wenn das Vorhaben gelingt, werden wir nicht nur verstehen, was es mit dem Calculus tatsächlich auf sich hat, sondern auch wissen, was sich damit alles anfangen lässt und wie wir ihn anwenden können.

Dazu müssen wir uns zunächst ein paar Gedanken zu Eigenart und Wesen der Mathematik machen.