Gottlob Freges Briefwechsel

mit D. Hilbert, E. Husserl,
B. Russell, sowie ausgewählte
Einzelbriefe Freges

mit Einleitungen, Anmerkungen und
Register herausgegeben von

GOTTFRIED GABRIEL
FRIEDRICH KAMBARTEL
CHRISTIAN THIEL

FELIX MEINER VERLAG
HAMBURG

PHILOSOPHISCHE BIBLIOTHEK BAND 321

Ausgewählte Studientexte auf der grundlage der Ausgabe »Gottlob Frege, Wissenschaftlicher Briefwechsel«, die im gleichen Verlag erschienen ist.

Im Digitaldruck »on demand« hergestelltes, inhaltlich mit der ursprünglichen Ausgabe identisches Exemplar. Wir bitten um Verständnis für unvermeidliche Abweichungen in der Ausstattung, die der Einzelfertigung geschuldet sind. Weitere Informationen unter: www.meiner.de/bod

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische
Daten sind im Internet über ‹http://portal.dnb.de› abrufbar.
ISBN 978-3-7873-0482-0
ISBN eBook: 978-3-7873-2295-4

 Gesamtherstellung: BoD, Norderstedt. Gedruckt auf alterungsbeständigem Werkdruckpapier, hergestellt aus 100 % chlorfrei gebleichtem Zellstoff. Printed in Germany. *www.meiner.de*

INHALTSVERZEICHNIS

[1] Ein * zeigt an, daß der Wortlaut des jeweiligen Schreibens nicht überliefert ist. Zur Numerierung cf. das editorische Vorwort.

Anhang: Ausgewählte Einzelbriefe

EDITORISCHES VORWORT

Mit der vorliegenden Auswahl soll der Edition von Freges *Wissenschaftlichem Briefwechsel* (Hamburg 1976) eine Studienausgabe zur Seite gestellt werden. Den Kern der Ausgabe bilden Freges Briefwechsel mit Hilbert, Husserl und Russell, die sich folgenden Themen zuordnen lassen: Grundlagen der Geometrie (Hilbert), Sprachphilosophie (Husserl) und Logik (Russell). Um diese Themen gruppieren sich auch die im Anhang gedruckten Einzelbriefe Freges an Dingler, Hönigswald, Jourdain, Linke, Marty und Peano. Zwei Briefe an Liebmann wurden als unmittelbar zum Briefwechsel mit Hilbert gehörig diesem nachgestellt.

Als Herstellungsverfahren wurde eine photomechanische Verkleinerung des Textes der „großen" Ausgabe gewählt. Druckfehler wurden berichtigt, Einleitungen und Anmerkungen teilweise ergänzt. Die zusätzlich aufgenommene Bibliographie soll das Aufschlüsseln der Literaturhinweise erleichtern: Ziffern in Winkelklammern ⟨ ⟩ beziehen sich auf die Nummern der Bibliographie.

Die Editionsprinzipien des *Wissenschaftlichen Briefwechsels* seien hier in Auszügen wiedergegeben:

Anordnung. Die Briefwechsel sind alphabetisch nach den Briefpartnern Freges angeordnet und mit römischen Ziffern durchnumeriert. Innerhalb eines Briefwechsels sind die Schreiben chronologisch angeordnet und arabisch durchnumeriert, und zwar mit jedem Briefwechsel neu beginnend. Die Ordnungszahl eines Briefes setzt sich daher aus der Briefwechselnummer und aus der von ihr durch einen Schrägstrich getrennten Briefnummer zusammen. (Für die vorliegende Studienausgabe wurde die Numerierung der Briefe beibehalten.)

Texterstellung. Wo die Herausgeber *wesentlich* in die Textvorlage eingegriffen haben, steht der veränderte Text in eckigen Klammern; der Wortlaut des Manuskriptes erscheint dann in einer Anmerkung. Wenn keine derartige Anmerkung erscheint, grenzen eckige Klammern eine reine Hinzufügung der Herausgeber ein. Die von den Briefautoren selbst verwendeten eckigen Klammern wurden im Druck wiedergegeben durch ⦃ ⦄. Hervorhebungen von Textstellen durch die Briefautoren sind kursiv gedruckt.

Bearbeitet wurden die Briefwechsel wie folgt: Hilbert und Liebmann (F. Kambartel), Husserl (G. Gabriel), Russell (Ch. Thiel); Auswahl der Briefe im Anhang (G. Gabriel). Die Herausgeber danken Fräulein Andrea Birk für ihre Mithilfe.

März 1980

G. Gabriel
F. Kambartel
Ch. Thiel

XV. FREGE-HILBERT

Einleitung des Herausgebers

David Hilbert (1862–1943) übernahm 1895 einen mathematischen Lehrstuhl in Göttingen und war damit in Freges Nähe gelangt.[1]) Das gleiche Jahr bringt im Anschluß an einen Vortrag Freges auf der *Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte* in Lübeck einen ersten Gesprächskontakt zwischen Frege und Hilbert, der in zwei Briefen (XV/1 u. 2) fortgesetzt wird. In Anknüpfung an Freges Vortrag beschränkt sich der Briefwechsel auf die Vor- und Nachteile des Gebrauchs von „Symbolen" statt „Worten" in der Mathematik. Er wird über seinen Anlaß hinaus zunächst nicht fortgeführt.

Im Wintersemester 1898/99 las Hilbert über „Elemente der Euklidischen Geometrie". Aus der Vorlesung ging Hilberts Werk *Grundlagen der Geometrie* hervor, das 1899 als Teil einer Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals erschien. – Frege bemüht sich sofort um ein Verständnis vor allem der von Hilbert vorgeschlagenen methodischen Neuorientierung. Eventuell hat er bereits recht früh Kenntnis von Hilberts Ansatz erhalten, nämlich über die von *H. v. Schaper* hergestellte Ausarbeitung der genannten Vorlesung Hilberts. Diese Ausarbeitung war Frege von einem Sohn seines Jenaer Kollegen *Otto Liebmann*, dem Mathematiker und seinerzeitigen Göttinger Privatdozenten *Heinrich Liebmann*, der ein Hörer der Hilbertschen Vorlesung war, übermittelt worden, möglicherweise allerdings erst als zusätzliche Information im Jahre 1900[2]). Freges Bedenken gegen Hilberts Umgang mit den Termini „Axiom", „Definition", „Erklärung" u.a. veranlassen ihn schließlich zu seiner ausführlichen brieflichen Anfrage vom 27. 12. 1899 (XV/3) bei Hilbert, die eine längere Auseinandersetzung einleitet. XV/3 moniert Hilberts nicht präzisierten Gebrauch des Terminus „Erklärung" und nimmt Anstoß an Hilberts Redeweise, daß Axiome Begriffe *definieren*. Frege spricht sich dafür aus, Definitionen als „Festsetzungen" klar von den Axiomen zu unterscheiden, die er entgegen Hilberts Intentionen weiterhin als Behauptungen versteht. Gegen das Unternehmen eines Widerspruchsfreiheitsbeweises für das Hilbertsche Axiomensystem wendet er ein, daß die Widerspruchsfreiheit schlicht aus der Wahrheit der Axiome folge. – XV/4, die umgehende Antwort Hilberts, artikuliert zunächst als Grundintention der Hilbertschen Axiomatik, die Frage der relativen Unabhängigkeit der Euklidischen Axiome und Postulate einer Erklärung und Entscheidung zuzuführen. Sodann sucht Hilbert die von ihm so genannten Erklärungen schlicht im Sinne der Tradition als Definitionen durch Addition von Merkmalen auszugeben, und zwar dadurch, daß er die Angabe der Merkmale durch die zugehörigen Axiome geschehen läßt. Er spricht sich ferner gegen Freges Wahrheitsanforderungen an Axiome dafür aus, die Wahrheit der Axiome und die Existenz der durch sie definierten Gegenstände eben als durch die Widerspruchsfreiheit der Axiome gewährleistet zu verstehen. Im übrigen schränkt er seine Auffassung der axiomatischen Definitionen gegen Ende des Briefes so ein, daß jede (axiomatische?) Theorie nicht Begriffe selbst, sondern ein „Schema von Begriffen" gebe. – Mit seiner Antwort XV/5 macht Frege einen Vorschlag, der darauf hinausläuft, die Widerspruchsfreiheit eines

---

[1] Zu Hilberts Leben und Werk cf. Hilberts *Lebensgeschichte* von *O. Blumenthal*, in: *D. Hilbert*, *Ges. Abh. III* (1935, Nachdruck New York 1965), p. 402, ferner *C. Reid: Hilbert* (Berlin u.a. 1970).

[2] Cf. Freges Brief an H. Liebmann vom 29. 7. 1900 (XXVII/1), mit dem Frege die Ausarbeitung zurückgibt.

Axiomensystems durch Angabe eines Modells (man kann annehmen: eines selbst nicht mehr bloß „axiomatisch gegebenen" Modells) zu beweisen, das den als Aussage*formen* verstandenen Axiomen genügt, und entsprechend auch Unabhängigkeitsbeweise zu führen. Trotz dieses Vorschlages zur Rekonstruktion der Hilbertschen Intentionen macht Frege der von Hilbert mit der axiomatischen Methode erhobene definitorische Anspruch weiter (und berechtigt) methodische Schwierigkeiten. Frege kann sich den rationalen Kern von Hilberts „axiomatischen Definitionen" nur so zurechtlegen, daß hier nicht Begriffe, sondern Beziehungen zwischen Begriffen, also mehrstellige Begriffe (kurz: Relationen) *zweiter Stufe* definiert werden. Danach führt dann allerdings entgegen Hilberts Behauptungen kein Weg von der Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems zu dessen Wahrheit und zu Existenzbehauptungen für die damit gegebenen „Gegenstände". – Hilbert geht auf die detaillierten und logisch begründeten Verständigungsvorschläge Freges im einzelnen nicht mehr ein. Seine kurze Postkarte XV/6 gibt Arbeitsbelastung als Grund dafür an, daß er die Diskussion nicht fortsetzen könne. – Frege nimmt einige Zeit später von Hilbert übersandte Sonderdrucke zum Anlaß, auf eine Fortsetzung der begonnenen Diskussion hinzuwirken (XV/7). Jedoch beharrt Hilberts kurze Antwort (XV/8) nur dogmatisch auf den bereits vorher geäußerten logisch unhaltbaren definitionstheoretischen Meinungen, ohne daß auf Freges Argumente eingegangen ist. – Drei Jahre später folgt noch ein vereinzelter Brief Hilberts nach (XV/9), der die Zusendung von *GGA II* zum Anlaß hat, jedoch keine neuen Argumente vorträgt.

Die Auseinandersetzung zwischen Frege und Hilbert um das Verständnis der axiomatischen Methode ist in der mathematischen Grundlagenforschung viel beachtet und diskutiert worden. Obwohl Frege mit seinen logischen Einwänden im Recht war und ein methodisch gereinigtes Verständnis der Axiomatik heute weitgehend auf Freges Vorschläge zurückgreifen muß, herrscht doch, zumal unter Mathematikern, ein Urteil vor, das Heinrich Scholz einmal so formuliert hat: „[...] heute zweifelt niemand daran, daß Frege, der selbst auf dem Boden des klassischen Wissenschaftsbegriffes so grundlegend Neues geschaffen hat, die radikale Hilbertsche Umwälzung dieses Wissenschaftsbegriffes nicht mehr zu erfassen vermocht hat, so daß seine an sich recht scharfsinnigen und heute noch lesenswerten kritischen Bemerkungen im wesentlichen als gegenstandslos bezeichnet werden müssen."[3]) Eine historische Darstellung, die bei aller Abgewogenheit in diese Richtung weist, gibt z.B. *H. Freudenthal* in einer Studie *Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. Zugleich eine Besprechung der 8. Aufl. von Hilberts „Grundlagen der Geometrie"*[4]). Wesentlich gerechter werden Freges Argumente in der Abhandlung *Frege und die Grundlagen der Geometrie* von *H. G. Steiner*[5]) behandelt, wenngleich auch hier die Interpretationstradition der Hilbert-Schule noch immer weitgehend bestimmend ist. Anerkennung und ausführliche systematische Würdigung hat Freges kritische Leistung gegenüber der axiomatischen Methode Hilberts jedoch zunehmend in der einschlägigen Frege-Forschung gefunden, z.B. bei *Dummett*, *Gabriel*, *von Kutschera* und *Resnik*.[6])

[3] *H. Scholz: Mathesis Universalis – Abhandlungen zur Philosophie als strenger Wissenschaft*, hrsg. von *H. Hermes u.a.* (Basel/Stuttgart 1961, Darmstadt ²1969), p. 222.

[4] Nieuw Archief voor Wiskunde 5/6 (1957/58), pp. 105–142.

[5] *Mathematik an Schule und Universität, H. Behnke zum 65. Geburtstag gewidmet.* Hg. v. K.-P. Grotemeyer u.a. (Göttingen 1964), pp. 175–186, 293–305.

[6] *M. Dummett: Frege on the Consistency of Mathematical Theories*, in: *Studien zu Frege I*, hrsg. von *M. Schirn* (Stuttgart-Bad Cannstatt 1976), pp. 229–242. – *G. Gabriel: Implizite Definitionen – Eine Verwechselungsgeschichte*, in: Annals of Science 35 (1978), pp.

Frege hatte Hilbert in seinem Brief XV/5 eine Veröffentlichung des vorhergegangenen Briefwechsels vorgeschlagen. Er drang aber mit diesem Ansinnen bei Hilbert nicht durch. Später äußert er sich dazu wie folgt: „Durch die Festschrift des Herrn Hilbert über die Grundlagen der Geometrie wurde ich veranlaßt, dem Herrn Verfasser meine abweichenden Ansichten brieflich darzulegen; und daraus entspann sich ein Briefwechsel, der leider bald beendet wurde. In der Meinung, die darin behandelten Fragen möchten von allgemeinerem Interesse sein, dachte ich an eine spätere Veröffentlichung. Herr Hilbert trägt indessen Bedenken, darein zu willigen, da seine eigenen Ansichten sich seitdem umgewandelt haben. Ich bedauere das, weil der Leser durch den Briefwechsel am bequemsten in den Stand der Fragen eingeführt und mir eine neue Abfassung erspart worden wäre [...]"[7]). Wie der letzte Satz deutlich macht, entschloß sich Frege, die Kontroverse in Form der Abhandlung fortzusetzen, die 1903 unter dem Titel *Über die Grundlagen der Geometrie* in zwei Teilen erschien (⟨27⟩, ⟨28⟩). Hilbert selbst reagierte darauf nicht. Die Verteidigung seines Standpunktes übernahm *A. Korselt*[8]), dem Frege mit einer erneuten Aufsatzfolge *Über die Grundlagen der Geometrie* (⟨30⟩ – ⟨32⟩) antwortete.

Der Briefwechsel (1. 10. 1895 – 7. 11. 1903) beläuft sich auf 6 Briefe und 3 Postkarten (4 Schreiben Freges an Hilbert und 5 Hilberts an Frege). Von den Briefen und Postkarten Hilberts sind bei XV/2, XV/6, XV/8 und XV/9 die Originale in der *SlgDarmst* erhalten. Von XV/3 hatte Frege seinerzeit selbst eine Teilabschrift angefertigt und am 25. 8. 1900 zusammen mit einer Teilabschrift der Briefe XV/4 und XV/5 an *H. Liebmann* geschickt[9]). *M. Steck* hat 1941 diese Abschriften in ⟨42⟩ veröffentlicht. Wie Prof. Steck mit einem Schreiben vom 24. 4. 1971 mitteilt, hat er die Abschriften an die Witwe Liebmanns zurückgegeben. Ihr weiteres Schicksal ist unbekannt. – Nach *SchL1–3* lag auch das Original von XV/4 in der *SlgDarmst*. Es konnte dort jedoch bisher nicht aufgefunden werden. Eine andere Notiz von Scholz verzeichnet das Original im *SchArch*. Diese Notiz macht es sehr wahrscheinlich, daß der Brief zu den 1945 verbrannten Beständen des *SchArch* gehört hat. Die Edition muß daher hier auf Stecks Publikation der genannten Teilabschrift Freges von XV/4 und auf die von Scholz veranlaßte Abschrift eines Konzeptes oder Exzerptes Hilberts zurückgreifen. – Über den Verbleib der insgesamt 4 Briefe an Hilbert ist nichts bekannt. Die Edition stützt sich auf Abschriften, die Scholz von den ihm von Hilbert leihweise überlassenen Originalen hat anfertigen lassen. Scholz hatte die Originale mit einem Brief an *G. Gentzen* vom 20. 4. 1936 wieder an Hilbert zurückgereicht. Nach Auskunft der Handschriftenabteilung der *Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen* vom 4. 11. 1971 sind diese Briefe im Hilbert-Nachlaß nicht vorhanden. – Die Briefe XV/3 und XV/5 sowie das in ⟨50⟩, pp. 68sq. wiedergegebene Konzept oder Exzerpt Hilberts von XV/4 sind auch, wahrscheinlich über Hilbert, in *Husserls* Hände gelangt. Husserl fertigte sich Exzerpte an, die im Husserl-Nachlaß erhalten sind. Diese Exzerpte hat *L. Eley* in den ergänzenden Texten seiner Neuausgabe von Husserls *Philosophie der Arithmetik* (= *Husserliana* 12, 1970), pp. 447–451, veröffentlicht.

419–423. – *F. von Kutschera: Elementare Logik* (Wien/New York 1967), 6.3.4. – *M. D. Resnik: Die Frege-Hilbert Kontroverse*, in: *Studien zu Frege I*, pp. 193–213. – Cf. ferner meine Untersuchungen: *Erfahrung und Struktur* (Frankfurt a.M. 1968), pp. 155 sqq.; *Frege und die axiomatische Methode – Zur Kritik mathematikhistorischer Legitimationsversuche der formalistischen Ideologie*, in: *Studien zu Frege I*, pp. 215–228.

[7] ⟨27⟩, p. 319.

[8] *Über die Grundlagen der Geometrie*, in: Jahresber. d. Dtsch. Math.-Verein. 12 (1903), [pp. 402–407.

[9] Cf. Freges Brief an H. Liebmann vom 25. 8. 1900 (XXVII/2).

XV/1 FREGE an HILBERT 1. 10. 1895[1])

Jena, den 1. X. 1895

Sehr geehrter Herr Kollege!

Sie sagten mir in Lübeck[2]), wenn ich mich erinnere, dass Sie das Formelwesen in der Mathematik eher zu vermindern als zu vermehren bestrebt wären. Da unsere Unterhaltung abgebrochen wurde, möchte ich Ihnen auf diesem Wege meine Meinung darlegen. Es handelt sich dabei, glaube ich, im Grunde nicht um den Gegensatz von gesprochenen Worten und geschriebenen Symbolen, sondern darum, ob Lehrsätze und Methoden von grosser oder geringer Tragweite besser zu gebrauchen seien. Dieser Gegensatz scheint nur dann mit dem ersten zusammen zu fallen, wenn es für die von Ihnen mit Recht vorgezogenen Methoden von grosser Tragweite noch keine hinreichende Symbolik gibt. Wo man aber einen Gedankengang in Symbolen vollkommen ausdrücken kann, wird er in dieser Form kürzer und übersichtlicher erscheinen, als in Worten. Ich setze dabei voraus, dass es wirklich derselbe Gedankengang sei und dass nicht etwa eine ganz andere Methode befolgt werde. Nur dann ist Vergleichbarkeit vorhanden. Die Vorteile der Übersichtlichkeit und Genauigkeit sind so gross, dass manche Untersuchungen ohne die mathematische Zeichensprache gar nicht hätten gemacht werden können. Nun kann es zwar vorkommen, dass beim weiteren Fortschreiten der Wissenschaft dieselben Ergebnisse leichter und vollkommener auf andern Wegen ohne oder mit geringer Anwendung von Symbolen erreicht werden können. Wenn sich aber die Zeichensprache so vervollkommnet hat, dass sie den neuen Gedankengang ausdrücken kann, wird dieser so übersichtlicher erscheinen als in Worten.

Man wird auch den Gebrauch von Symbolen nicht einem gedankenlosen, mechanischen Verfahren gleichsetzen dürfen, obwohl die Gefahr in einen blossen Formelmechanismus zu verfallen hierbei weit näher liegt, als beim Gebrauch des Wortes. Man kann auch in Symbolen denken. Ein bloss mechanisches Formeln[3]) ist gefährlich 1. für die Wahrheit der Ergebnisse, 2. für die

---

[1] Dem Text des Briefes liegt eine Maschinenabschrift aus dem *SchNachl* zugrunde. Über den Verbleib des Originals, das Scholz nach den Unterlagen im *SchArch* von Hilbert entliehen hatte und diesem 1936 über *G. Gentzen* wieder zustellen ließ, ist nichts bekannt.

[2] Frege und Hilbert hatten sich auf der *67. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte* getroffen, die vom 16. 9. bis 20. 9. 1895 in Lübeck stattfand. Frege hielt dort am 17. 9. in der Abteilung für Mathematik und Astronomie einen Vortrag, aus dem der am 6. 7. 1896 vor der *Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig* gehaltene, 1897 publizierte Vortrag *Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene* ⟨24⟩ hervorging. Daß Frege sich in Lübeck wie in der späteren Veröffentlichung (⟨24⟩, pp. 362sqq.) auch allgemein zu den Vorzügen einer Begriffsschrift vor den „Wortsprachen" geäußert hatte, dürfte der Anlaß zu den Bemerkungen Hilberts über „das Formelwesen in der Mathematik" gewesen sein, an die dieser Brief anknüpft.

[3] Falls Frege nicht ein neugebildetes Verb „formeln" gebraucht, fehlt hier ein Verb.

Fruchtbarkeit der Wissenschaft. Die erste Gefahr lässt sich wohl fast ganz durch die logische Vervollkommnung der Bezeichnung beseitigen. Was die zweite betrifft, so würde die Wissenschaft zum Stillstande gebracht, wenn der Formelmechanismus so überhand nähme, dass er den Gedanken ganz erstickte. Dennoch möchte ich solchen Mechanismus keineswegs als ganz unnütz oder schädlich ansehen. Im Gegenteil glaube ich, dass er notwendig ist. Der natürliche Hergang scheint folgender zu sein. Was ursprünglich ganz von Gedanken durchtränkt war, verhärtet sich mit der Zeit zu einem Mechanismus, der dem Forscher das Denken zum Teil abnimmt. Ähnlich wie beim Musikspiel eine Reihe ursprünglich bewußter Vorgänge unbewusst und mechanisch geworden sein müssen, damit der Künstler, von diesen Dingen entlastet, seine Liebe in das Spiel legen könne. Ich möchte dieses mit dem Verholzungsvorgange vergleichen. Wo der Baum lebt und wächst, muss er weich und saftig sein. Wenn aber das Saftige nicht mit der Zeit verholzte, könnte keine bedeutende Höhe erreicht werden. Wenn dagegen alles Grüne verholzt ist, hört das Wachstum auf.

Der natürliche Weg, auf dem man zu einer Symbolik gelangt, scheint mir der zu sein, dass man bei einer in Worten geführten Untersuchung das Breite und Unübersichtliche und Ungenaue der Wortsprache als hinderlich empfindet und, um dem abzuhelfen, eine Zeichensprache schafft, in der die Untersuchung übersichtlicher und genauer geführt werden kann. Also: erst das Bedürfnis, dann die Befriedigung. Dagegen erst eine Symbolik zu schaffen und dann Anwendungen für sie zu suchen, möchte weniger förderlich sein. Vielleicht ist die Boole-Schröder-Peanosche Symbolik diesen Weg gegangen.

Indem ich hoffe, Sie mit diesen Darlegungen nicht gelangweilt zu haben, verbleibe ich

hochachtungsvoll
Ihr ergebener
Dr. G. Frege

XV/2 Hilbert an Frege 4. 10. 1895[1])

Göttingen, 4. Okt. 1895.

Hochgeehrter Herr College.

Ihr werther Brief[2]) hat mich ausserordentlich interessirt; ich bedaure umsomehr, dass ich Sie nur so flüchtig in Lübeck[3]) gesprochen habe. Hoffentlich bietet sich ein anderes Mal mehr Gelegenheit dazu.

Wenn das Semester beginnt, habe ich die Absicht, Ihren Brief in unsrer mathematischen Gesellschaft zur Besprechung zu bringen. Ich glaube, dass

[1] Das Original des Briefes befindet sich in der *SlgDarmst* unter der Signatur H 1889.
[2] Freges Brief vom 1. 10. 1895 (XV/1).
[3] Bei der bereits p. 4, Anm. 2, erwähnten *Versammlung der Naturforscher und Ärzte.*

Ihre Meinung über das Wesen und den Zweck der Symbolik in der Mathematik genau das Richtige trifft. Besonders stimme ich darin bei, dass die Symbolik erst das Spätere sein und einem Bedürfnis entsprechen muss, woraus dann natürlich folgt, dass derjenige, welcher eine Symbolik schaffen oder ausbilden will, vor Allem jene Bedürfnisse zu studiren hat. Mit ergebenstem Gruss

Hochachtungsvoll
Hilbert.

XV/3 Frege an Hilbert 27. 12. 1899[1])

Jena, d. 27. Dez. 1899

Hochgeehrter Herr Kollege!

Ich habe mit Interesse Kenntnis von Ihrer Festschrift über die Grundlagen der Geometrie[2]) genommen, um so mehr, als ich mich selbst früher damit beschäftigt habe, ohne jedoch etwas zu veröffentlichen. Wie natürlich, finden zwischen meinem früheren unvollendeten Versuche und Ihrer Darstellung Berührungen, aber auch mannigfache Abweichungen statt. Insbesondere glaubte ich, mit weniger Urgebilden auskommen zu können. Ich habe mit den Kollegen Thomae und Gutzmer[3]) über Ihre Schrift gesprochen, und es hat sich dabei gezeigt, dass wir über Ihre eigentliche Meinung nicht immer im Klaren sind, und das veranlasst mich, Ihnen diese Zweifel vorzutragen, in der Hoffnung, dass es Ihnen nicht unlieb sein werde, darüber Aufklärungen zu geben. Ich gehe aus von einer Äusserung Thomaes über Ihre Erklärung

---

[1] Dem Text des Briefes liegt eine Abschrift aus dem *SchArch* zugrunde. Eine bis auf die Einleitungs- und Schlußsätze vollständige Abschrift von Freges Hand hat *M. Steck* bereits 1941 ⟨42⟩, pp. 11–15, veröffentlicht. Stecks Brieftext ist hier mit *Steck* abgekürzt. – Abweichungen der beiden Abschriften sind in den Anmerkungen notiert, soweit sie nicht aus der altertümlichen Orthographie bei *Steck* oder aus offenbaren Abschreibfehlern resultieren oder für den Sinn unerhebliche Abschreibvarianten darstellen.

Über den Verbleib des Originals, das *Scholz* nach den Unterlagen im *SchArch* 1936 über *G. Gentzen* an Hilbert zurückgehen ließ, ist nichts bekannt. Das Original von *Steck* befand sich im Nachlaß von *H. Liebmann* (cf. den Briefwechsel XXVII Frege-Liebmann weiter unten) und ist nach Auskunft von Prof. Steck seinerzeit an die Witwe Liebmanns zurückgegangen. Sein weiterer Verbleib konnte nicht geklärt werden.

[2] Gemeint ist die 1. Auflage von Hilberts *Grundlagen der Geometrie*, die 1899 in Leipzig als 1. Teil (pp. 1–92) einer *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen* erschienen war.

[3] *C. F. A. Gutzmer* und *J. Thomae*, mit dessen „formaler“ Begründung der Arithmetik sich Frege ausführlich auseinandersetzte (cf. *GGA II*, §§ 86sqq., ⟨33⟩, ⟨34⟩, ⟨35⟩), hatten seinerzeit mathematische Professuren an der Universität Jena inne.

im § 3[4]). Er sagte ungefähr so: „Das ist keine Definition; denn es ist gar kein Merkmal angegeben, an dem das Stattfinden der Beziehung des Zwischen erkannt werden könnte". Für eine Definition kann auch ich es nicht halten; aber Sie nennen es auch nicht so, sondern Erklärung. Sie brauchen beide Ausdrücke „Erklärung" und „Definition" offenbar, um damit etwas Verschiedenes zu bezeichnen[5]), aber der Unterschied ist uns nicht klar. Die Erklärungen des § 4[6]) scheinen ganz derselben Art zu sein, wie Ihre Definitionen; es wird darin z.B. gesagt, was die Worte „liegen in der Geraden *a* auf derselben Seite vom Punkte *O*" bedeuten sollen, ebenso wie in der darauf folgenden Definition z.B. gesagt ist, was das Wort Streckenzug bedeuten soll. Ganz anderer Art sind wohl die Erklärungen der §§ 1 und 3, bei denen die Bedeutungen der Wörter „Punkt", „Gerade", „zwischen" nicht angegeben, sondern als bekannt vorausgesetzt werden. Wenigstens scheint es so.[7]) Man ist aber auch im Unklaren darüber, was Sie Punkt nennen. Zunächst denkt man an die Punkte im Sinne der euklidischen Geometrie, worin man bestärkt wird durch den Satz, dass die Axiome Grundtatsachen unserer Anschauung ausdrücken[8]). Nachher aber (S. 20) denken Sie sich ein Paar Zahlen als einen Punkt[9]). Bedenklich sind mir die Sätze (§ 1), dass die genaue und vollständige Beschreibung von Beziehungen durch die Axiome der Geometrie erfolge[10]), und dass (§ 3) Axiome den Begriff „zwischen" definieren[11]). Damit wird etwas den Axiomen aufgebürdet, was Sache der Definitionen ist. Dadurch

---

[4] Frege bezieht sich im folgenden vor allem auf Formulierungen in zwei Sätzen, die Hilbert der Gruppe der Anordnungsaxiome II 1 – II 4 voranstellt:

„Die Axiome dieser Gruppe definiren den Begriff 'zwischen' und ermöglichen auf Grund dieses Begriffes die *Anordnung* der Punkte auf einer Geraden, in einer Ebene und im Raume.

Erklärung. Die Punkte einer Geraden stehen in gewissen Beziehungen zu einander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort '*zwischen*' dient."

[5] Hilberts *Grundlagen der Geometrie* enthalten zu dem von Frege unterstellten Bedeutungsunterschied keine expliziten Angaben.

[6] Die „Erklärungen" des § 4 definieren Redeweisen im Zusammenhang damit, daß eine Gerade durch einen Punkt, eine Ebene durch eine Gerade, der Raum durch eine Ebene in zwei „Seiten" geteilt werden. Ohne weitere Motivation nennt Hilbert im selben Paragraphen die Einführung der Termini „Streckenzug", „Polygon" u.a. dagegen „Definition".

[7] Cf. Hilberts Dementi pp. 11sq.

[8] Cf. *Grundlagen der Geometrie* § 1: „Die Axiome der Geometrie gliedern sich in fünf Gruppen; jede einzelne dieser Gruppen drückt gewisse zusammengehörige Grundthatsachen unserer Anschauung aus."

[9] Frege bezieht sich hier auf den im § 9 der *Grundlagen der Geometrie* ausgeführten Widerspruchsfreiheitsbeweis für das Hilbertsche Axiomensystem durch Angabe eines analytischen Modells. Dabei formuliert Hilbert: „Wir denken uns ein Paar von Zahlen (x, y) des Bereiches Ω als einen Punkt [...]".

[10] Hilbert: „Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie 'liegen', 'zwischen', 'parallel', 'congruent', 'stetig'; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*."

[11] Cf. Anm. 4.

scheinen mir die Grenzen zwischen Definitionen und Axiomen in bedenklicher Weise verwischt zu werden und neben der alten Bedeutung des Wortes „Axiom", die in dem Satze hervortritt, dass Axiome Grundtatsachen der Anschauung ausdrücken, eine andere, aber mir nicht recht fassbare aufzutauchen. Jetzt schon ist eine Verwirrung hinsichtlich der Definitionen in der Mathematik eingerissen, und manche scheinen nach der Regel zu handeln:

Was man nicht recht beweisen kann,
Das sieht man als Erklärung an.

Angesichts dessen scheint es mir nicht gut, die Verwirrung noch dadurch zu steigern, dass man auch das Wort „Axiom" in schwankendem Sinne und zum Teil ähnlich wie „Definition" gebraucht. Es wäre an der Zeit, meine ich, dass man sich einmal darüber verständigte, was eine Definition ist und leisten soll, und welche Grundsätze beim Definieren demgemäss zu befolgen sind (Meine Grundgesetze der Arithmetik Bd. I § 33). Jetzt scheint mir darin völlige Anarchie und subjektives Belieben obzuwalten. Erlauben Sie mir, Ihnen Einiges darzulegen, was ich darüber gedacht habe.

Die Gesamtheit der mathematischen Sätze möchte ich aufteilen in Definitionen und alle übrigen Sätze (Axiome, Grundgesetze[12]), Lehrsätze). Jede Definition enthält ein Zeichen (einen Ausdruck, ein Wort), das vorher noch keine Bedeutung hatte, dem erst durch die Definition eine Bedeutung gegeben wird. Nachdem dies geschehen ist, kann man aus der Definition einen selbstverständlichen Satz machen, der wie ein Axiom zu gebrauchen ist. Es ist aber daran festzuhalten, dass in der Definition nichts behauptet, sondern etwas festgesetzt wird. Es darf also nie etwas als Definition hingestellt werden, was eines Beweises oder sonst einer Begründung seiner Wahrheit bedarf. Ich gebrauche das Gleichheitszeichen als Identitätszeichen. Nehmen wir nun an, das Pluszeichen, das Dreizeichen und das Einszeichen seien ihrer Bedeutung nach bekannt, das Vierzeichen aber unbekannt, so können wir durch die Gleichung „$3+1=4$" dem Vierzeichen eine Bedeutung geben. Nachdem dies geschehen, ist nun jene Gleichung von selbst wahr und bedarf keines Beweises mehr. Wenn man sich aber einer Beweislast dadurch entledigen wollte, dass man eine Definition aufstellte, so wäre das logische Taschenspielerei. Es ist für die Strenge mathematischer Untersuchungen durchaus wesentlich, dass der Unterschied zwischen Definitionen und allen andern Sätzen in aller Schärfe durchgeführt werde. Die andern Sätze (Axiome, Grundgesetze, Lehrsätze) dürfen kein Wort enthalten und kein Zeichen, dessen Sinn und Bedeutung oder dessen Beitrag[13]) zum Gedankenausdruck nicht bereits völlig feststände, sodass über den Sinn des Satzes, den darin ausgedrückten Gedanken kein Zweifel ist. Es kann sich dann nur darum handeln, ob dieser Gedanke wahr sei, und worauf dann etwa seine Wahrheit beruhe. Axiome und Lehrsätze können also nie die Bedeutung eines in ihnen

---

[12] So bei *Steck*, die Abschrift aus dem *SchArch* hat: Grundsätze.

[13] *Steck*: dürfen kein Wort (Zeichen) enthalten, dessen Sinn und Bedeutung oder (bei Formwörtern, Buchstaben in Formeln) dessen Beitrag.

vorkommenden Zeichens oder Wortes erst festsetzen[14]) wollen, die vielmehr schon feststehen muss. Man kann noch eine dritte Art von Sätzen, die Erläuterungssätze[15]) annehmen, die ich aber nicht zur Mathematik selbst rechnen, sondern in den Vorhof, in eine Propädeutik verweisen möchte. Sie sind den Definitionen ähnlich, indem es sich auch bei ihnen um die Festsetzung der Bedeutung eines Zeichens (Wortes) handelt. Auch sie enthalten also etwas, dessen Bedeutung wenigstens nicht als vollständig und unzweifelhaft bekannt vorausgesetzt werden kann, weil es etwa in der Sprache des Lebens schwankend oder vieldeutig gebraucht wird. Wenn in einem solchen Falle die beizulegende Bedeutung logisch einfach ist, so kann man keine eigentliche Definition geben, sondern muss sich darauf beschränken, die im Sprachgebrauche vorkommenden[16]), aber nicht gewollten Bedeutungen abzuwehren und auf die gewollte hinzuweisen, wobei man freilich immer auf ein entgegenkommendes erratendes Verständnis rechnen muss. Solche Erläuterungssätze können bei den Beweisen nicht gleich den Definitionen gebraucht werden, weil ihnen die dazu nötige Genauigkeit fehlt, weshalb ich sie, wie gesagt, in den Vorhof verweisen möchte. Axiome nenne ich Sätze, die wahr sind, die aber nicht bewiesen werden, weil ihre Erkenntnis aus einer von der logischen ganz verschiedenen Erkenntnisquelle fliesst, die man Raumanschauung nennen kann. Aus der Wahrheit der Axiome folgt[17]), dass sie einander nicht widersprechen. Das bedarf also keines weiteren Beweises. Auch die Definitionen dürfen einander nicht widersprechen. Tun sie es, so sind sie fehlerhaft. Die Grundsätze des Definierens müssen so beschaffen sein, dass bei ihrer Befolgung ein Widerspruch nicht auftreten kann. Wenn ich Ihr Axiom II 1[18]) als solches aufstellte, so setzte ich dabei die Bedeutungen der Ausdrücke „etwas ist Punkt einer Geraden" und „*B* liegt zwischen *A* und *C*" als vollständig und unzweideutig bekannt voraus, bei Letzterem allgemein, was auch unter den Buchstaben verstanden werden möchte. Dann kann das Axiom nicht dazu dienen, etwa das Wort „zwischen" genauer zu erklären, und es ist selbstverständlich unmöglich, diesem Wort nachträglich noch eine Bedeutung zu geben, wie Sie es auf S. 20 andeuten[19]). Wenn diese Bedeutung verschieden ist von der Bedeutung des Wortes „zwischen" im § 3, so haben Sie eine höchst bedenkliche Zweideutigkeit. Es scheint kaum etwas Anderes übrig zu bleiben als die Annahme, das Wort „zwischen" habe in II 1 überhaupt noch keine Bedeutung. Dann kann aber II 1 nicht wahr, also kein Axiom sein in meinem Sinne des Wortes, der, wie ich meine, der allgemein angenommene ist. Wenn jenes Wort,

---

[14] *Steck*: feststellen.

[15] Zu Freges Unterscheidung der Erläuterungen von den Definitionen im engeren Sinne, cf. auch *NSchrWB I*, p. 224, ferner, mit Bezug auf Hilbert, *GLG III I*, p. 301.

[16] *Steck*: beschränken, durch Winke die im Sprachgebrauch vorkommenden.

[17] *Steck*: folgt von selbst.

[18] Das Axiom II 1 lautet in der 1. Auflage der *Grundlagen der Geometrie*: „*Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.*"

[19] Es handelt sich um die Einführung einer Anordnung in dem von Hilbert angegebenen Modell seines Axiomensystems.

wie dann wahrscheinlich ist, im § 3 überhaupt noch keinen Sinn hat, so hat auch der Satz II 1 keinen Sinn, drückt keinen Gedanken, also auch keine Grundtatsache unserer Anschauung aus. Was soll er dann aber? Soll er wie eine Definition die Bedeutung von „zwischen" festsetzen? Dann kann das später nicht noch einmal geschehen. In § 6[20]) sagen Sie: „Die Axiome dieser Gruppe definieren den Begriff der Kongruenz oder der Bewegung". Warum werden sie dann nicht Definitionen genannt? Welcher Unterschied ist dann überhaupt zwischen Definitionen und Axiomen? Freilich genügen diese den Anforderungen, die an eine Definition gestellt werden müssen, schon deshalb nicht, weil ihrer mehrere sind, ferner auch deshalb nicht, weil darin Ausdrücke vorkommen („auf einer gegebenen Seite der Geraden *a*'")[21]), deren Bedeutungen selber noch nicht festzustehen scheinen. Ich verkenne nicht, dass um die Unabhängigkeit der Axiome von einander zu beweisen, Sie sich auf einen höhern Standpunkt stellen müssen, von dem aus die euklidische Geometrie als besonderer Fall eines allgemeineren erscheint; aber der Weg, den Sie dazu einschlagen, scheint mir aus den angegebenen Gründen nicht ohne weiteres gangbar zu sein.[22])

Ich würde Ihre Schrift nicht für wertvoll halten, wenn ich nicht ungefähr zu sehen glaubte, wie etwa solchen Einwänden die Spitze abzubrechen wäre; aber das wird wohl nicht ohne erhebliche Umgestaltung möglich sein. Zunächst scheint mir jedenfalls eine Verständigung über die Ausdrücke: „Erklärung", „Definition", „Axiom" nötig zu sein, worin Sie von dem mir Geläufigen und auch wohl Hergebrachten stark abweichen, wodurch es mir schwer wird, diese Ausdrücke in Ihrer Darstellung auseinander zu halten und den logischen Bau in voller Klarheit zu erkennen. Trotz dieser Bedenken interessiert mich Ihre Schrift sehr, und Sie würden mich höchst erfreuen durch einen Brief, in dem Sie Ihren Standpunkt meinen Zweifeln gegenüber darlegen würden.

Verzeihen Sie bitte diese Bemerkungen und seien Sie überzeugt, dass ich sie nicht gemacht habe, um Ihnen lästig zu fallen, sondern weil ich glaube, dass auch Andern beim Lesen Ihrer Schrift wohl diese oder ähnliche Bedenken gekommen sind, die zu zerstreuen oder unschädlich zu machen wünschenswert ist.

Mit vorzüglicher Hochachtung Ihr ergebener
Dr. G. Frege.

---

[20] In der 9. Aufl. der *Grundlagen der Geometrie*: § 5.

[21] Der Ausdruck kommt in Hilberts Axiom IV 1 (in der 9. Auflage der *Grundlagen der Geometrie*: III 1) vor.

[22] Der letzte Satz ist in der Abschrift aus dem *SchArch* wohl versehentlich weggefallen. Er wurde hier nach *Steck* ergänzt.

XV/4 Hilbert an Frege 29. 12. 1899[1])

... Noch eine Vorbemerkung: Wenn wir uns verstehen wollen, dürfen wir nicht die Verschiedenartigkeit der Absichten, die uns leiten, vergessen. Ich bin zu der Aufstellung meines Systems von Axiomen durch die Not gezwungen: ich wollte die Möglichkeit zum Verständnis derjenigen geometrischen Sätze geben, die ich für die wichtigsten Ergebnisse der geometrischen Forschungen halte: dass das Parallelenaxiom keine Folge der übrigen Axiome ist, ebenso das Archimedische etc. Ich wollte die Frage beantworten, ob der Satz, dass in zwei gleichen Rechtecken mit gleicher Grundlinie auch die Seiten gleich sind*), bewiesen werden kann, oder vielmehr wie bei Euklid ein neues Postulat ist. Ich wollte überhaupt die Möglichkeit schaffen, dass man solche Fragen verstehen und beantworten kann, warum die Winkelsumme im Dreieck 2 Rechte ist und wie diese Thatsache mit dem Parallelenaxiom zusammenhängt. Dass mein System von Axiomen solche Fragen in ganz bestimmter Weise zu beantworten gestattet und dass man auf viele dieser Fragen sehr überraschende und sogar ganz unerwartete Antworten erhält, lehrt, glaube ich meine Festschrift, sowie weitere von meinen Schülern hieran geschlossene Arbeiten, von denen ich mir nur auf die von Herrn Dehn verfasste und in nächster Zeit in den Math. Annalen zum Abdruck kommende Dissertation[2]) hinzuweisen erlaube. Dies also meine Hauptabsicht. Dabei glaube ich nun freilich auch ein System der Geometrie aufgestellt zu haben, welches auch den strengsten Anforderungen der Logik genügt und damit komme ich zur eigentlichen Beantwortung Ihres Briefes.

Sie sagen, meine Erklärung in § 3 sei keine Definition des Begriffes „zwischen"[3]). Denn es fehlen die Merkmale. Ja diese Merkmale sind ja ausführlich in den Axiomen II 1 – II 5 angegeben. Wenn man aber das Wort Definition genau im hergebrachten Sinne nehmen will, so hat man zu sagen:

„Zwischen" ist eine Beziehung für die Punkte einer Geraden, die folgende Merkmale hat: II 1 ... II 5.

Sie sagen weiter. „Ganz anders sind wohl die Erklärungen in § 1, wo die Bedeutungen Punkt, Gerade, ... nicht angegeben, sondern als bekannt voraus-

* Dieser Satz ist doch die Grundlage der ganzen Flächenmessung.

[1] Dem Text des Briefes liegt der Abdruck einer Teilabschrift von Freges Hand in der von *M. Steck* 1941 besorgten Edition ⟨42⟩, pp. 15–19, zugrunde. Nach einer Notiz von Scholz lag das Original nicht wie die anderen Briefe Hilberts an Frege in der *SlgDarmst*, sondern im *SchArch*, und dürfte daher verlorengegangen sein. Auch eine vollständige Abschrift des Briefes blieb im *SchArch* nicht erhalten, wohl aber die Abschrift eines Konzeptes oder Teilexzerptes, das sich Hilbert offenbar von seinem Briefe gemacht hatte. Dieses Exzerpt ist im Anschluß an die Teilabschrift Freges wiedergegeben in ⟨50⟩, pp. 68sq.

[2] *M. Dehn: Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck*, in: Math. Ann. 53 (1900), pp. 404–439.

[3] Cf. p. 7.

gesetzt werden."[4]) Hier liegt wohl der Cardinalpunkt des Missverständnisses. Ich will nichts als bekannt voraussetzen; ich sehe in meiner Erklärung in § 1 die Definition der Begriffe Punkte, Gerade, Ebenen[5]), wenn man wieder die sämtlichen Axiome der Axiomgruppen I–V als die Merkmale hinzunimmt. Wenn man nach andern Definitionen für ,,Punkt", etwa durch Umschreibungen wie ausdehnungslos etc. sucht, so muss ich solchem Beginnen allerdings aufs entschiedenste widersprechen; man sucht da etwas, was man nie finden kann, weil nichts da ist, und alles verliert sich und wird wirr und vage und artet in Versteckspiel aus. Wollen Sie meine Axiome lieber Merkmale der in den ,,Erklärungen" gesetzten und dadurch vorhandenen Begriffe nennen[6]), so würde ich dagegen gar nichts einzuwenden haben, ausser etwa, dass das der Gewohnheit der Mathematiker und Physiker widerspricht – freilich muss ich auch mit dem Setzen der Merkmale frei schalten können. Denn sobald ich ein Axiom gesetzt habe, ist es vorhanden und ,,wahr"; und damit komme ich nun zu einem weiteren wichtigen Punkte Ihres Briefes. Sie schreiben: ,,Axiome nenne ich Sätze ... Aus der Wahrheit der Axiome folgt, dass sie einander nicht widersprechen."[7]) Es hat mich sehr interessirt, gerade diesen Satz bei Ihnen zu lesen, da ich nämlich, solange ich über solche Dinge denke, schreibe und vortrage, immer gerade umgekehrt sage: Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definirten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz. Der Satz ,,jede Gl[eichung] hat eine Wurzel" ist wahr oder die Wurzelexistenz ist bewiesen, sobald das Axiom ,,Jede Gl[eichung] hat eine Wurzel" zu den übrigen arithmetischen Axiomen hinzugefügt werden kann, ohne dass jemals bei irgendwelchen gezogenen Schlüssen ein Widerspruch entstehen kann. Diese Auffassung ist allerdings der Schlüssel nicht nur zum Verständnis meiner Festschrift, sondern auch beispielsweise meines neulich in München über die Axiome der Arithmetik gehaltenen Vortrages[8]), wo ich den Nachweis führe oder wenigstens andeute, dass das System aller gewöhnlichen reellen Zahlen *existiert*, dass dagegen das System aller Cantorschen Mächtigkeiten oder auch aller Alefs – wie auch Cantor in ähnlichem Sinne, nur mit ein wenig andern Worten behauptet – *nicht existiert*. Also, um die Hauptsache noch einmal zu sagen: Die Umnennung ,,Merkmale" statt ,,Axiome" etc. ist doch nur eine Aeusserlichkeit und überdies Geschmackssache – ist aber jedenfalls leicht zu bewerkstelligen. Dagegen in 3 Zeilen eine Definition des Punktes geben zu wollen, ist meines Erachtens eine Unmöglichkeit, da vielmehr erst der ganze Aufbau der Axiome die vollständige Definition giebt. Jedes Axiom trägt ja zur Definition etwas bei und jedes neue Axiom ändert also den Begriff. ,,Punkt" in der Euklidischen, Nicht-Euklidischen, Archimedischen, Nicht-Archimedischen Geometrie ist jedesmal was Anderes. Nach vollständiger und eindeutiger Festlegung eines Begriffes ist die Hinzufügung irgendeines Axioms

[4] Cf. p. 7. [5] Cf. ibid. [6] Cf. ibid. [7] Cf. p. 9.

[8] *Über den Zahlbegriff*, veröffentlicht in: Jahresber. d. Dtsch. Math.-Verein. 8 (1900), pp. 180–184, ferner als Anhang VI der 7. Aufl. von Hilberts *Grundlagen der Geometrie*.

meiner Ansicht nach etwas durchaus Unerlaubtes und Unlogisches – ein Fehler, der sehr häufig, besonders von Physikern gemacht wird. Dadurch dass sie im Laufe der Untersuchung immer neue und neue Axiome machen, die mit den früher gemachten Annahmen gar nicht confrontiert werden und von denen gar nicht gezeigt wird, ob sie auch keiner aus den früher gemachten Axiomen folgenden Thatsache widersprechen, kommt in physikalischen theoretischen Untersuchungen oft heller Unsinn zum Vorschein. Gerade das Verfahren ein Axiom zu machen, sich auf die Wahrheit (?) desselben zu berufen und daraus zu schliessen, dass dasselbe mit den definirten Begriffen sich verträgt, ist in den modernen physikalischen Untersuchungen eine Hauptquelle von Irrthümern und Missverständnissen. Ein Hauptzweck meiner Festschrift sollte es sein, diesen Fehler zu vermeiden.

Ich habe nur noch einen Einwand zu berühren. Sie sagen meine Begriffe z.B. „Punkt", „zwischen" seien nicht eindeutig festgelegt; z.B. S. 20 sei „zwischen" anders gefasst und dort sei der Punkt ein Zahlenpaar. – Ja, es ist doch selbstverständlich eine jede Theorie nur ein Fachwerk oder Schema von Begriffen nebst ihren nothwendigen Beziehungen zu einander, und die Grundelemente können in beliebiger Weise gedacht werden. Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z.B. das System: Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger ..., denke und dann nur meine sämmtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze, z.B. der Pythagoras auch von diesen Dingen. Mit andern Worten: eine jede Theorie kann stets auf unendliche viele Systeme von Grundelementen angewandt werden. Man braucht ja nur eine umkehrbar eindeutige Transformation anzuwenden und festzusetzen, dass die Axiome für die transformirten Dinge die entsprechend gleichen sein sollen. Thatsächlich wendet man auch diesen Umstand häufig an, z.B. Dualitätsprinzip etc. und ich in meinen Unabhängigkeitsbeweisen. Die sämmtlichen Aussagen einer Electricitätstheorie gelten natürlich auch von jedem andern System von Dingen, welches man an Stelle der Begriffe Magnetismus, Electricität ... substituirt, wenn nur die geforderten Axiome erfüllt sind. Der genannte Umstand kann aber nie ein Mangel*) einer Theorie sein und ist jedenfalls unvermeidlich. Allerdings ist zur Anwendung der Theorie auf die Welt der Erscheinungen meines Erachtens immer ein gewisses Maass von gutem Willen und Takt erforderlich: dass man für Punkte möglichst kleine Körper, für Gerade möglichst lange etwa Lichstrahlen etc. substituirt. Auch wird man bei der Prüfung der Sätze nicht allzu genau sein dürfen; denn das sind ja nur Sätze der Theorie. Uebrigens je weiter eine Theorie ausgeführt ist und je feiner verzweigt ihr Bau ist, desto selbstverständlicher wird die Art ihrer Anwendung auf die Welt der Erscheinungen und es gehört schon ein sehr grosses Maass vom bösem Willen dazu, wollte man die feineren Sätze der Flächentheorie oder der Maxwell'schen Electricitätstheorie auf andere Erscheinungen anwenden, als sie gemeint sind ...

* Vielmehr ein gewaltiger Vorteil.

XV/5 Frege an Hilbert 6. 1. 1900[1])

Jena, d. 6. Januar 1900.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Besten Dank für Ihren ausführlichen und interessanten Brief[2]), über den ich mich sehr gefreut habe. Ich sehe, dass wir vielfach über dieselben Fragen nachgedacht haben, aber nicht immer zu denselben Ergebnissen gelangt sind. Umso ergiebiger (wenigstens für mich) verspricht ein Gedankenaustausch zu werden, und es ist mir lieb, dass Ihnen eine Gegenäusserung von mir erwünscht ist.

Aus Ihrem Münchener Vortrage[3]), für dessen freundliche Zusendung ich bestens danke, glaube ich Ihren Plan noch etwas deutlicher[4]) erkannt zu haben. Es scheint mir, dass Sie die Geometrie von der Raumanschauung ganz loslösen und zu einer rein logischen Wissenschaft gleich der Arithmetik machen wollen. Die Axiome, die sonst wohl als durch die Raumanschauung verbürgt, dem ganzen Baue zu Grunde gelegt werden, sollen, wenn ich Sie recht verstehe als Bedingungen in jedem Lehrsatz mitgeführt werden, zwar nicht im vollen Wortlaute ausgesprochen, aber als in den Wörtern „Punkt", „Gerade", u.s.w. eingeschlossen. Sie wollen die gegenseitige Unabhängigkeit und die Widerspruchslosigkeit gewisser Voraussetzungen (Axiome), die Unbeweisbarkeit von Sätzen aus gewissen Voraussetzungen (Axiomen) beweisen. Allgemein logisch angesehen ist dies immer derselbe Fall: es soll die Widerspruchslosigkeit gewisser Bestimmungen gezeigt werden. „D ist keine Folge von A, B und C" besagt dasselbe wie „das Stattfinden von A, B und C steht nicht im Widerspruche mit dem Nichtstattfinden von D". „A, B und C sind von einander unabhängig" heisst „C ist keine Folge von A und B; B ist keine Folge von A und C; A ist keine Folge von B und C". Nachdem so alles auf dasselbe Schema zurückgeführt ist, müssen wir fragen: welches Mittel haben wir, um nachzuweisen, dass gewisse Eigenschaften, Forderungen (oder wie man sonst

---

[1] Dem Text des Briefes liegt eine Maschinenabschrift aus dem *SchArch* zugrunde. Eine bis auf die Einleitungs- und Schlußsätze vollständige Abschrift von Freges Hand hat *M. Steck* bereits 1941 ⟨42⟩, pp. 19–26, veröffentlicht. Stecks Brieftext ist hier mit *Steck* abgekürzt. – Abweichungen der beiden Abschriften sind in den Anmerkungen notiert, soweit sie nicht aus der altertümlichen Orthographie bei *Steck* oder durch offenbare Abschreibfehler resultieren oder für den Sinn unerhebliche Abschreibvarianten darstellen.

Über den Verbleib des Brieforiginals, das Scholz nach den Unterlagen im *SchArch* 1936 über *G. Gentzen* an Hilbert zurückgehen ließ, ist nichts bekannt. Das Original von *Steck* befand sich im Nachlaß von *H. Liebmann* (cf. den Briefwechsel XXVII Frege-Liebmann weiter unten) und ist nach Auskunft von *Prof. Steck* seinerzeit an die Witwe *Liebmanns* zurückgegangen. Sein weiterer Verbleib konnte nicht geklärt werden.

[2] Hilberts Brief vom 29. 12. 1899 (XV/4).

[3] Cf. p. 12, Anm. 8.

[4] *Steck*: besser.

sagen will) nicht mit einander im Widerspruch stehen? Das einzige mir bekannte ist dies: einen Gegenstand aufzuweisen, der jene Eigenschaften sämtlich hat, einen Fall anzugeben, wo jene Forderungen sämtlich erfüllt sind. Auf anderem Wege die Widerspruchslosigkeit nachzuweisen, dürfte nicht möglich sein. Wenn es sich nur darum handelt, die gegenseitige Unabhängigkeit von Axiomen nachzuweisen, so wird zu zeigen sein, dass das Nichtstattfinden eines dieser Axiome mit dem Stattfinden der übrigen nicht im Widerspruch stehe (ich bequeme mich hier Ihrer Gebrauchsweise des Wortes „Axiom“ an). Nun wird es im Gebiete der elementaren, euklidischen[5]) Geometrie unmöglich sein, ein solches Beispiel zu geben, weil eben hier sämtliche Axiome wahr sind. Dadurch nun, dass Sie sich auf einen höheren Standpunkt stellen, von dem aus die euklidische Geometrie als besonderer Fall eines umfassenderen Lehrgebäudes erscheint, öffnet sich die Aussicht auf Beispiele, die jene gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome einleuchtend machen. Hier stösst mir allerdings ein Bedenken auf, das ich aber hier nicht weiter verfolgen will. Eine Hauptsache scheint mir zu sein, dass Sie die euklidische Geometrie unter einen höhern Gesichtspunkt rücken wollen. Und in der Tat, die gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome zu beweisen, wird auf diesem Wege oder gar nicht möglich sein. Ein solches Unternehmen scheint mir auch von höchstem wissenschaftlichen Interesse zu sein, wenn es sich bezieht auf die Axiome im althergebrachten Sinne der elementaren euklidischen Geometrie. Weit geringer dürfte *im Allgemeinen* die wissenschaftliche Bedeutsamkeit einer solchen Untersuchung sein, welche sich erstreckt auf ein System von willkürlich aufgestellten Sätzen. Ob es möglich ist, so die gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome der euklidischen Geometrie zu beweisen, wage ich nicht zu entscheiden wegen jenes angedeuteten Bedenkens. Jedenfalls ist Ihre Idee, die euklidische Geometrie als besonderen Fall einer umfassenderen Lehre anzusehen, auch ohne diesen Erfolg wertvoll.

Darin stimme ich Ihnen ganz bei, dass die genetische Methode die volle logische Sicherheit vermissen lässt[6]). Dass die Entwickelung der Wissenschaft diesen Weg eingeschlagen hat, liegt in der Natur der Sache; darüber darf nicht vergessen werden, dass als Ziel, dem diese Entwickelung zustrebt, doch immer das logisch vollkommene System im Auge behalten werden muss. Sie schreiben: „Nach vollständiger und eindeutiger Festlegung des Begriffes ist die Hinzufügung irgendeines Axioms meiner Ansicht nach etwas durchaus Unerlaubtes und Unlogisches.“[7]) Wenn ich Ihre Meinung hier richtig verstehe, kann ich nur mit Freuden zustimmen, umso mehr, als ich geglaubt habe,

---

[5] *Steck*: elementaren euklidischen.

[6] Hilbert hatte in seinem Münchener Vortrag die Methode, das System der reellen Zahlen durch „sukzessive Erweiterung“, „genetisch“, aus den natürlichen Zahlen zu gewinnen, kritisiert und demgegenüber der „axiomatischen Methode“ auch für die Arithmetik, „zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhaltes unserer Erkenntnis“, den Vorzug gegeben (*Grundlagen der Geometrie*, [7]1930, pp. 241sq.).

[7] Cf. p. 13.

mit dieser Ansicht fast allein[8]) zu stehen. In der Tat liegt darin wohl eben der Mangel der genetischen Methode, dass die Begriffe nicht fertig sind und doch in diesem unfertigen, also eigentlich unbrauchbaren Zustande gebraucht werden, dass man nie weiss, ob ein Begriff nun endgültig fertig sei. So kommt es, dass man Sätze beweisen kann, die dann durch die fortschreitende Entwickelung wieder falsch gemacht werden, weil die darin enthaltenen Gedanken andere werden. Grade solche Wandlungen, deren man sich bei dem gleichbleibenden Wortlaute gar nicht einmal recht bewusst wird, sind das Gefährliche.

Auch in der Geringschätzung der Definitionen von „Punkt“ durch Umschreibungen mit „ausdehnungslos“[9]) stimme ich Ihnen zu; nur würde ich das Eingeständnis, dass man „Punkt“ überhaupt nicht eigentlich definieren kann, nicht scheuen.

Solange wir uns so ganz im Allgemeinen bewegen, scheinen wir uns demnach in befriedigender Übereinstimmung zu befinden. Anders wird es bei der wirklichen Ausführung. Ich hatte wohl schon vorher die Möglichkeit ins Auge gefasst, Ihre Axiome als Bestandteile Ihrer Erklärungen aufzufassen, und doch war es mir erstaunlich zu erfahren, dass sämtliche Axiome der Gruppen I–V zur Ergänzung der Erklärung im § 1 hinzuzunehmen sind[10]). Danach füllt ja eigentlich diese Erklärung mit dem, was dazugehört, Ihr ganzes Kapitel I aus, und darin sind zahlreiche andere Erklärungen und Lehrsätze eingeschachtelt. Ich gestehe, dass mir dieser logische Bau rätselhaft und im höchsten Grade undurchsichtig vorkommt. Ich bin beim Nachdenken über das Definieren immer strenger in meinen Anforderungen daran geworden und habe mich wohl so weit von der Meinung der meisten Mathematiker entfernt, dass eine Verständigung sehr erschwert ist. Woran ich Anstoss nehme, wird vielleicht am deutlichsten bei der Betrachtung Ihrer Erklärung im § 3[11]). Ich ziehe zur Vergleichung heran die Gaussische Definition der Zahlenkongruenz. Wenn man weiss, was die Differenz ist, und was es heisst „eine Zahl geht in einer Zahl auf“, so hat man durch diese Erklärung die Kongruenz der Zahlen ganz in seiner Gewalt und kann sofort entscheiden, ob z.B. $2 \equiv 8 \pmod 3$ ist.[12]) Ganz anders läge die Sache, wenn das Wort „kongruent“ nicht nur durch Bekanntes, sondern auch durch sich selbst erklärt würde, wenn man etwa nach Ihrer Weise sagte:
„Erklärung. Die ganzen Zahlen stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort „kongruent“ dient.

[8] *Steck*: mit dieser Ansicht allein.

[9] Cf. p. 12. [10] Cf. ibid.

[11] Die Abschrift von Scholz hat: § 5. Daß Frege weiter unten auf die Axiome der Anordnung abstellt, spricht für die Lesart bei *Steck*; wenn nicht sogar, wie der Vergleich mit der Zahlenkongruenz nahelegt, der § 6 (= § 5 der 9. Auflage) gemeint ist, der die geometrischen Kongruenzaxiome enthält.

[12] $x \equiv y \pmod m$, gelesen: x kongruent y modulo m, gilt definitionsgemäß genau dann, wenn m $x-y$ teilt („in $x-y$ aufgeht“).

Axiom 1. Jede Zahl ist sich selbst kongruent nach einem beliebigen Modul.
Axiom 2. Wenn eine Zahl einer zweiten und diese einer dritten nach demselben Modul kongruent ist, so ist auch die erste der dritten nach diesem Modul kongruent.“ usw.

Würde man einer solchen Definition entnehmen können, dass $2 \equiv 8 \pmod 3$? Schwerlich! Bei Ihrer Erklärung des Zwischen liegt die Sache noch ungünstiger; denn Ihre Axiome der Anordnung enthalten auch noch die Wörter „Punkt“ und „Gerade“, deren Bedeutungen ebenfalls unbekannt sind. Ihr System von Definitionen gleicht einem System von Gleichungen mit mehreren Unbekannten, bei dem die Auflösbarkeit und besonders die Eindeutigkeit der Bestimmung der Unbekannten zweifelhaft bleibt. Wenn diese bestände, wäre es besser, diese Lösungen zu geben, d.h. jeden der Ausdrücke „Punkt“, „Gerade“, „zwischen“ einzeln durch schon Bekanntes zu erklären. Ich weiss nicht, wie ich mit Ihren Definitionen die Frage entscheiden soll, ob meine Taschenuhr ein Punkt sei. Gleich das erste Axiom handelt von zwei Punkten[13]); wenn ich also wissen wollte, ob es von meiner Uhr gälte, müsste ich zunächst von einem anderen Gegenstande wissen, dass er ein Punkt wäre. Aber selbst wenn ich das z.B. von meinem Federhalter wüsste, so könnte ich noch immer nicht entscheiden, ob meine Uhr und mein Federhalter eine Gerade bestimmten, weil ich nicht wüsste, was eine Gerade wäre. Dann würde noch das Wort „bestimmen“ Schwierigkeiten machen. Aber auch wenn ich die Wörter „Punkt“ und „Gerade“ wie in der elementaren Geometrie verstände, und es wären mir drei Punkte auf einer Geraden gegeben, so könnte ich nach Ihrer Erklärung und den dazugehörigen Axiomen doch nicht entscheiden, welcher dieser Punkte zwischen den beiden anderen läge, und wüsste auch nicht, welche Untersuchungen ich zu diesem Zwecke etwa anstellen müsste. Dazu kommt noch folgendes. Nach I 7[14]) gibt es auf jeder Geraden wenigstens zwei Punkte. Was würden Sie nun zu folgendem sagen[15]):
„Erklärung. Wir denken uns Gegenstände, die wir Götter nennen.
Axiom 1. Jeder Gott ist allmächtig.
Axiom 2. Jeder Gott ist allgegenwärtig.
Axiom 3. Es gibt wenigstens einen Gott“?
Hier kommt meine Unterscheidung von Begriffen erster und zweiter Stufe in Betracht. Ich sage „meine“, weil mir nicht bekannt ist, dass sie vor mir in hinreichender Schärfe gemacht ist. In dem „es gibt“ haben wir einen Begriff zweiter Stufe, der nicht mit *allmächtig* und *allgegenwärtig*, welche erster Stufe sind, zusammen als Merkmal eines Begriffes erster Stufe genommen werden darf. (Meine Grundlagen der Arithmetik § 53, wo ich statt „Stufe“ „Ord-

---

[13] Hilberts Axiom I 1 lautet: „Zwei von einander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a; wir setzen $AB = a$ oder $BA = a$.

[14] Gemeint ist Hilberts Axiom I 7: „*Auf jeder Geraden giebt es wenigstens zwei Punkte, in jeder Ebene wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte und im Raum giebt es wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.*“

[15] Cf. im folgenden auch Freges Brief an Liebmann vom 29. 7. 1900.

nung" sagte; meine Grundgesetze der Arithmetik §§ 21 und 22). Die Merkmale, die Sie in ihren Axiomen angeben, sind wohl sämtlich höherer als erster Stufe; d.h. sie antworten nicht auf die Frage „Welche Eigenschaften muss ein Gegenstand haben, um ein Punkt (eine Gerade, Ebene usw.) zu sein?", sondern sie enthalten z.B. Beziehungen zweiter Stufe, etwa des Begriffes *Punkt* zum Begriffe *Gerade.* Es scheint mir, dass Sie eigentlich Begriffe zweiter Stufe definieren wollen, aber diese von denen erster Stufe nicht deutlich unterscheiden. Aus derselben Quelle fliesst wohl die Anfechtbarkeit der Definition der Grösse, die z.B. Stolz in der Einleitung seiner Vorlesungen über allgemeine Arithmetik gibt[16]). Es ist dabei immer das Auftreten des Wortes „gleichartig" mit gänzlich verschwimmender Bedeutung charakteristisch. Nur durch ganz veränderte Fragestellung kann das vermieden werden. Und in ähnlicher Weise würde auch wohl die Heilung der Schäden, die ich an Ihren Definitionen zu finden glaube, geschehen müssen; nur dass sie hier viel schwerer sein wird, weil statt eines Systems hier drei Systeme (der Punkte, Geraden und Ebenen) und mannigfache Beziehungen in Betracht kommen. Übrigens, was nennen Sie hier System? Ich glaube dasselbe, was man sonst auch wohl Menge oder Klasse nennt, und was am zutreffendsten Umfang eines Begriffes genannt wird.

Am schroffsten stehen sich wohl unsere Ansichten gegenüber hinsichtlich Ihres Kriteriums der Existenz und der Wahrheit. Aber vielleicht verstehe ich Ihre Meinung nicht vollkommen. Um darüber ins Reine zu kommen, lege ich folgendes Beispiel vor.

---

[16] Frege bezieht sich wohl vor allem auf die folgenden Formulierungen von Stolz: „Die Bezeichnung ‚Grösse (μέγεθος)' kommt in Euclid's Elementen vor, doch ihren Begriff erklärt er nirgends. Nach ihm sind als Grössen zu betrachten die begrenzten geometrischen Gebilde: Linien, Winkel, Flächen, Körper; jedoch wohl auch die natürlichen Zahlen. Allen gemeinsam sind die folgenden Merkmale, auf denen das Rechnen mit ihnen beruht: man kann die gleichartigen unter ihnen vergleichen, addiren, subtrahiren und im Allgemeinen jede Grösse in mit ihr gleichartige Theile zerlegen. Den Grössen stellt die Geometrie der Alten die geometrischen Verhältnisse gegenüber, obwol sie selbst auch ihnen das erste der obigen Merkmale beilegt, wozu, wie wir sehen werden, die übrigen treten können. Indem wir von den geometrischen Grössen, der natürlichen Zahl und dem Euclid'schen Verhältnisse zur nächst höheren Gattung aufsteigen, gelangen wir zur absoluten Grösse im engern Sinne [...] Nichts hindert, noch allgemeinere Begriffe aufzustellen. Wenn wir nur das erste aus der obigen Gruppe von Merkmalen festhalten, so ergiebt sich der weiteste Begriff, von welchem auch H. Grassmann ausgeht. Geben wir ihm den Namen ‚Grösse', so wird ein Grössenbegriff ein Begriff von der Art sein, dass je zwei der darunter enthaltenen Dinge entweder als gleich oder als ungleich erklärt sind. Mit andern Worten: ‚Grösse heisst ein jedes Ding, welches einem anderen gleich oder ungleich gesetzt werden soll.' Alle Dinge, die mit einem Dinge verglichen sind, heissen gleichartige (homogene) Grössen und bilden ein Grössensystem." (Cf. *Otto Stolz: Vorlesungen über allgemeine Arithmetik I,* Leipzig 1885, pp. 1sq.; Stolz zitiert mit dem in Anführungsstrichen gesetzten Satz *H. Grassmanns: Lehrbuch der Arithmetik,* Berlin 1861, p. 1.)

Nehmen wir an, wir wüssten, dass die Sätze
„1. A ist ein intelligentes Wesen;
2. A ist allgegenwärtig;
3. A ist allmächtig“
mit ihren sämtlichen Folgen einander nicht widersprächen; könnten wir daraus schliessen, dass es ein allmächtiges, allgegenwärtiges, intelligentes Wesen gäbe? Mir will das nicht einleuchten. Das Prinzip würde etwa so lauten:
Wenn die Sätze
„A hat die Eigenschaft Φ“
„A hat die Eigenschaft Ψ“
„A hat die Eigenschaft X“
mit sämtlichen Folgen einander nicht allgemein, (was auch A sei)[17]) widersprechen, so gibt es einen Gegenstand, der diese Eigenschaften Φ, Ψ, X sämtlich hat. Dies Prinzip ist mir nicht einleuchtend und würde wahrscheinlich auch nutzlos sein, wenn es wahr wäre. Gibt es hierbei ein anderes Mittel, die Widerspruchslosigkeit nachzuweisen, als dass man einen Gegenstand aufweist, der die Eigenschaften sämtlich hat? Hat man aber einen solchen Gegenstand, so braucht man nicht erst auf dem Umwege der Widerspruchslosigkeit nachzuweisen, dass es einen gibt.

Wenn ein allgemeiner Satz einen Widerspruch enthält, so auch jeder unter ihm begriffene besondere Satz. Man kann also aus der Widerspruchslosigkeit des letzteren auf die des allgemeinen Satzes schliessen, aber nicht umgekehrt.[17a]) Setzen wir den Fall, wir hätten bewiesen, dass in einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke das Quadrat über der Hypothenuse doppelt so gross ist wie das über einer Kathete, was leichter ist, als den allgemeinen Pythagoras zu beweisen. Wir können nun von hier aus schliessen, dass der Satz keinen Widerspruch enthält, weder zu sich noch zu den geometrischen Axiomen.[17b]) Aber können wir nun weiter schliessen: also ist der Pythagoras wahr? Ich kann eine solche Schlussweise von der Widerspruchslosigkeit auf die Wahrheit nicht anerkennen. So meinen Sie es wahrscheinlich auch nicht. Jedenfalls scheint eine genauere Formulierung notwendig.

Eine logische Gefahr schien mir noch darin zu liegen, dass Sie z.B. „das Parallelenaxiom“ sagen, als ob es in jeder besonderen Geometrie[18]) dasselbe wäre. Nur der Wortlaut ist derselbe; der Gedankeninhalt ist in jeder anderen Geometrie[19]) ein anderer. Es wäre nicht richtig, den vorhin erwähnten be-

---

[17] *Steck*: (allgemein, was auch A sei).

[17a] Cf. Anm. 6, p. 27, insbes. dort den letzten Satz.

[17b] *Steck*: Wir können nun von hier aus schliessen, dass der Satz keinen Widerspruch enthält*), dass das Hypotenusenquadrat bei einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck gleich der Summe der Kathetenquadrate ist. Daraus können wir weiter folgern, dass der allgemeine Pythagoras keinen Widerspruch*) enthält. [Anm. Freges:] *weder in sich noch zu den geometrischen Axiomen.

[18] *Steck*: in jeder andern Geometrie.

[19] *Steck*: in jeder besondern Geometrie.

sonderen Fall des Pythagoras *den Pythagoras* zu nennen; denn wenn man jenen besonderen Fall bewiesen hat, hat man damit noch nicht *den Pythagoras* bewiesen. Gesetzt nun, auch die Axiome[20]) in den besonderen Geometrien seien sämtlich besondere Fälle allgemeiner Axiome, so kann man aus der Widerspruchslosigkeit in einer besonderen Geometrie zwar auf die Widerspruchslosigkeit im allgemeinen Falle, aber nicht auf die Widerspruchslosigkeit in einem anderen besonderen Falle schliessen.

Über das, was Sie von der Anwendbarkeit einer Theorie und den umkehrbar eindeutigen Transformationen sagen[21]), behalte ich mir eine Gegenäusserung noch vor.

Schliesslich möchte ich Ihnen im Hinblick auf die grosse Wichtigkeit der von uns behandelten Fragen für die ganze Mathematik vorschlagen, eine spätere Veröffentlichung unseres Briefwechsels ins Auge zu fassen.[22])

Indem ich Ihre Grüsse und Glückwünsche zum neuen Jahrhundert bestens erwidere, bleibe ich

hochachtungsvoll
Ihr ergebener
G. Frege.

XV/6 Hilbert an Frege 15. 1. 1900[1])

Sehr geehrter Herr College!

Leider ist es mir bei der augenblicklichen Überbürdung mit Arbeiten aller Art, nicht möglich Ihren Brief[2]) eingehend zu beantworten. Ihre Ausführungen sind mir von vielem Interesse und großem Werth. Sie werden mich jedenfalls zu einem genaueren Nachdenken und zu einer sorgfältigen Formulirung meiner Gedanken anregen.

Göttingen 15ten Jan.

Mit bestem Gruß
Ihr ergebenster
Hilbert.

---

[20] *Steck*: Gesetzt nun auch, diese Axiome.

[21] Cf. p. 13.

[22] Cf. zu Hilberts Reaktion p. 3.

6 [1] Das Original, eine Postkarte, befindet sich in der *SlgDarmst* unter der Signatur H 1889.

[2] Freges Brief vom 6. 1. 1900 (XV/5).

XV/7 FREGE an HILBERT 16. 9. 1900[1])

Jena, den 16. September 1900.

Hochgeehrter Herr Kollege!

Besten Dank für die mir gütigst zugesandten beiden Drucksachen[2])! Die mathematischen Probleme[3]) habe ich mit grossem, durch einzelne Meinungsverschiedenheiten nicht vermindertem Interesse gelesen. Doch ist die Reibungsfläche unserer Meinungen schon hinreichend gross, sodass eine Erweiterung fürs erste wohl besser unterbleibt. Ich will mir daher nur einige Bemerkungen erlauben, die mit den in unserem Briefwechsel behandelten Fragen zusammenhängen.

Auf S. 12[4]) ist mir der Satz aufgefallen, in dem von den Axiomen gesagt wird, dass sie eine genaue und vollständige Beschreibung derjenigen Beziehungen enthalten, die zwischen den elementaren Begriffen einer Wissenschaft stattfinden. Das kann ich mit dem nicht in Einklang bringen, was Sie in Ihrem Briefe[5]) über die Axiome schreiben, wonach diese als Bestandteile der Definitionen jener elementaren Begriffe anzusehen seien[6]). Von Beziehungen zwischen Begriffen – z.B. der der Unterordnung des ersten unter den zweiten – kann doch erst die Rede sein, nachdem diese Begriffe als scharf begrenzte gefasst sind, nicht aber während sie definiert werden.

---

[1] Dem Text des Briefes liegt eine Maschinenabschrift aus dem *SchArch* zugrunde. Über den Verbleib des Originals, das Scholz nach den Unterlagen im *SchArch* von Hilbert entliehen hatte und diesem 1936 über *G. Gentzen* wieder zustellen ließ, ist nichts bekannt.

[2] Neben dem in Anm. 3 genannten Titel kommt zeitlich und inhaltlich besonders in Frage Hilberts Abhandlung *Über den Zahlbegriff*. Daß Hilbert Frege einen Sonderdruck dieser Veröffentlichung geschickt hat, wird auch dadurch nahegelegt, daß der zugrunde liegende Münchener Vortrag Hilberts vorher Gegenstand des Briefwechsels war (cf. pp. 12, 14).

[3] Es handelt sich um Hilberts berühmten Vortrag *Mathematische Probleme*, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß in Paris 1900. Dem an Frege gesandten Sonderdruck dürfte die Veröffentlichung des Vortrages in den Nachrichten von der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Mathem.-physik. Klasse, Jg. 1900, pp. 253–297, zugrunde liegen. Die im Arch. f. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 1 (1901), pp. 44–63, 213–237, erschienene Fassung des Vortrages ist in: *David Hilbert, Gesammelte Abhandlungen III* (Berlin 1935, Nachdruck New York 1965), pp. 290–329, wieder herausgegeben worden.

[4] Frege bezieht sich offenbar auf eine gesonderte Paginierung des Sonderdrucks, so daß die von ihm angegebene p. 12 der p. 264 in der genannten Fassung der Göttinger Nachrichten entspricht. Dort heißt es: „Wenn es sich darum handelt, die Grundlagen einer Wissenschaft zu untersuchen, so hat man ein System von Axiomen aufzustellen, welche eine genaue und vollständige Beschreibung derjenigen Beziehungen enthalten, die zwischen den elementaren Begriffen jener Wissenschaft stattfinden."

[5] Hilberts Brief vom 29. 12. 1899.

[6] Cf. pp. 65 sq.

Aus manchen Stellen in Ihren Vorträgen glaube ich entnehmen zu dürfen, dass meine Gründe Sie nicht überzeugt haben, um so gespannter bin ich darauf, Ihre Gegengründe zu erfahren. Es scheint mir, dass Sie im Besitze eines Prinzips zum Beweise der Widerspruchslosigkeit zu sein glauben, wesentlich verschieden von dem in meinem letzten Briefe[7]) formulierten[8]), das Sie, wenn ich mich recht erinnere, in Ihren Grundlagen der Geometrie allein anwenden[9]). Wenn Sie hierin Recht hätten, so könnte das von ungeheuerer Bedeutung sein; ich glaube allerdings zunächst noch nicht daran, sondern vermute, dass sich ein solches Prinzip auf das von mir formulierte wird zurückführen lassen, und also von keiner grösseren Tragweite als dieses sein kann. Wenn Sie mir in Ihrer Antwort auf meinen letzten Brief, auf die ich immer noch hoffe, ein solches Prinzip genau formulieren und vielleicht an einem Beispiele der Anwendung erläutern könnten, so würde das zur Klärung viel beitragen.

Da ich mich gerade viel mit dem Problem des Irrationalen beschäftige, ist mir die Andeutung interessant, die Sie unten auf S. 13 geben[10]). Aber zunächst halte ich diese Art der Begründung nicht für durchführbar aus zwei Gründen, von denen der eine durch Angabe des oben gedachten Prinzips vielleicht entkräftet werden könnte.

Ich habe unseren Briefwechsel Herrn Dr. Liebmann in Leipzig mitgeteilt[11]), der über die Grundlagen der Geometrie im Winter lesen will. Damit werden Sie hoffentlich einverstanden sein. Herr Dr. L. will mir seine Ansicht schreiben, sobald er ein selbständiges Urteil gewonnen hat.

Mit besten Grüssen
hochachtungsvoll
G. Frege.

---

[7] Freges Brief vom 6. 1. 1900. [8] Cf. p. 19.

[9] Cf. *Grundlagen der Geometrie* §§ 9sqq.

[10] Frege bezieht sich wohl auf folgende Ausführungen in Hilberts Vortrag *Mathematische Probleme* (p. 265 l.c.):

„Ich bin nun überzeugt, daß es gelingen muß, einen direkten Beweis für die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome zu finden, wenn man die bekannten Schlußmethoden in der Theorie der Irrationalzahlen im Hinblick auf das bezeichnete Ziel genau durcharbeitet und in geeigneter Weise modificirt.

Um die Bedeutung des Problems noch nach einer anderen Rücksicht hin zu charakterisiren, möchte ich folgende Bemerkungen hinzufügen. Wenn man einem Begriffe Merkmale erteilt, die einander widersprechen, so sage ich: der Begriff existirt mathematisch nicht. So existirt z.B. mathematisch nicht eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich —1 ist. Gelingt es jedoch zu beweisen, daß die dem Begriffe erteilten Merkmale bei Anwendung einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen niemals zu einem Widerspruche führen können, so sage ich, daß damit die mathematische Existenz des Begriffes z.B. einer Zahl oder einer Function, die gewisse Forderungen erfüllt, bewiesen worden ist. In dem vorliegenden Falle, wo es sich um die Axiome der reellen Zahlen in der Arithmetik handelt, ist der Nachweis für die Widerspruchslosigkeit der Axiome zugleich der Beweis für die mathematische Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen oder des Continuums."

[11] Cf. den Brief Freges an Liebmann vom 25. 8. 1900 und in der Einleitung des Hrsgs. hier die Ausführungen p. 1.

XV/8 HILBERT an FREGE 22. 9. 1900[1])

Göttingen d. 22. 9. 00

Sehr geehrter Herr College.

Besten Dank für Ihren Brief[2]), den ich, von Aachen zurückgekehrt, vorfinde und wie Ihre früheren Briefe mit grossem Interesse gelesen habe. Ich weiss sehr wohl, dass ich Ihnen noch die ausführliche Antwort auf Ihren letzten Brief[3]) schuldig bin und nunmehr mein Schuldconto noch grösser wird. Aber da ich jetzt erst wieder eine neue Vorlesung über partielle Differentialgl[eichungen] der Physik vorzubereiten habe, so sende ich vorläufig lieber diese Karte als garnichts.

Meine Meinung ist eben die, dass ein Begriff nur durch seine Beziehungen zu anderen Begriffen logisch festgelegt werden kann. Diese Beziehungen, in bestimmten Aussagen formulirt, nenne ich Axiome und komme so dazu, dass die Axiome (ev[tl]. mit Hinzunahme der Namengebungen für die Begriffe) die Definitionen der Begriffe sind. Diese Auffassung habe ich mir nicht etwa zur Kurzweil ausgedacht, sondern ich sah mich zu derselben gedrängt durch die Forderung der Strenge beim logischen Schliessen und beim logischen Aufbau einer Theorie. Ich bin zu der Ueberzeugung gekommen, dass man in der Mathematik und den Naturwissenschaften subtilere Dinge nur so mit Sicherheit behandeln kann, anderenfalls sich bloss im Kreise dreht.

Mit den besten Grüssen und der Hoffnung, Sie doch noch zu überzeugen und vielleicht auch von Ihnen trotz meiner vorläufig flüchtigen Antwort zu hören

Ihr ergebenster
Hilbert.

XV/9 HILBERT an FREGE 7. 11. 1903[1])

Göttingen d. 7. 11. 03

Sehr geehrter Herr College. Besten Dank für den 2ten Band Ihrer „Grundgesetze"[2]), der mich sehr interessirt. Ihr Beispiel am Schlusse des Buches

---

8 [1] Das Original, eine Postkarte, befindet sich in der *SlgDarmst* unter der Signatur H 1889.

[2] Freges Brief vom 16. 9. 1900 (XV/7).

[3] Freges Brief vom 6. 1. 1900 (XV/5).

9 [1] Das Original, eine Postkarte, befindet sich in der *SlgDarmst* unter der Signatur H 1889.

[2] *GGA II* erschien 1903.

S. 253[3]) ist uns hier bekannt*); andere noch überzeugendere Widersprüche fand ich bereits vor 4–5 Jahren[5]); sie führten mich zu der Ueberzeugung, dass die traditionelle Logik unzureichend ist, die Lehre von der Begriffsbildung vielmehr einer Verschärfung und Verfeinerung bedarf, wobei ich als die wesentlichste Lücke im herköm[m]lichen Aufbau der Logik die Annahme ansehe, wonach – das nehmen alle Logiker u. Mathem[atiker] bisher an – ein Begriff bereits da sei, wenn man von jedem Gegenstande angeben könne, ob er unter ihn falle oder nicht. Dies ist wie mir scheint nicht hinreichend. Vielmehr ist die Erkenntnis der Widerspruchslosigkeit der Axiome, die den Begriff definiren, das Entscheidende. – Ihren Kritiken kann ich im Allgemeinen zustimmen; nur dass Sie Dedekind[6]) u. vor Allem Cantor[7]) nicht voll gerecht werden.

Schade, dass Sie weder in Cassel[8]) noch in Göttingen[9]) waren – vielleicht entschliessen Sie sich doch einmal ausser der Zeit zu einem Besuch in G[öttingen]. Bei den heutigen bequemen Eisenbahnfahrten ist doch der mündliche Verkehr dem schriftlichen vorzuziehen. Mir wenigstens fehlt es zu letzterem leider an Zeit. Es sind hier eine Reihe junger Gelehrter, die sich für die „Axiomatisirung der Logik" interessiren.

Hochachtungsvoll Hilbert.

* Ich glaube vor 3–4 Jahren fand es Dr. Zermelo auf die Mitteilung meiner Beispiele hin[4]).

---

[3] Es handelt sich um die in einem Nachwort zu *GGA II* von Frege mitgeteilte und eingehend behandelte Russellsche Antinomie. Cf. auch den Briefwechsel XXXVI Frege-Russell.

[4] *E. Zermelo*, der damals Dozent in Göttingen war, hatte die Russellsche Antinomie nach den vorliegenden Berichten (cf. z.B. *C. Reid: Hilbert*, Berlin u.a. 1970, p. 98) unabhängig von Russell entdeckt.

[5] *O. Blumenthal* erwähnt in seiner *Lebensgeschichte* Hilberts, daß dieser sich von der Fragwürdigkeit des seinerzeitigen mathematischen Umgangs mit dem Unendlichen „endgültig durch das von ihm selbst aufgestellte, nirgends aus dem Gebiete der rein mathematischen Operationen heraustretende Beispiel der widerspruchsvollen Menge aller durch Vereinigung und Selbstbelegung entstehenden Mengen" überzeugte (*D. Hilbert*, *Ges.Abh. III*, Berlin 1935, Nachdruck New York 1965, pp. 421sq.).

[6] Cf. *GGA II*, §§ 138sqq. [7] Cf. *GGA II*, §§ 68sqq.

[8] In Kassel hatte vom 20. bis 25. 9. 1903 die *75. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte* stattgefunden.

[9] Die in Kassel versammelten Teilnehmer der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hatten am 25. und 26. 9. die Göttinger mathematischen und physikalischen Institute besucht (cf. Jber. d. Dtsch. Math.-Verein. 12 (1903), pp. 517, 520). – Eventuell bezieht sich Hilbert aber auch auf die Sitzung der *Göttinger Mathematischen Gesellschaft* am 12. 5. 1903, bei der *E. Zermelo* über Freges Grundlegung der Arithmetik referiert hatte (cf. Jber. d. Dtsch. Math.-Verein. 12 (1903), pp. 345sq.).