2 Beharrungs- und Zeitverhalten von Regelkreisgliedern

Burkard Fromm

Formelzeichen und Abkürzungen

A	Fläche
AP	Arbeitspunkt
c	spezifische Wärmekapazität
C	elektrische Kapazität
const.	konstanter Wert
$f(\omega)$	Amplitudengang
f_0	Bezugswert für Amplitudengang
h	Füllstand
H	Ventilhub
i_C	Kondensatorstrom
K	Strömungsleitwert
L	Länge
K_D	Differenzierbeiwert
K_I, K_I	Integrierbeiwert
K_P	Proportionalbeiwert
m	Masse
m_W	Wassermasse
$\dot{m}$	Massenstrom
n	Drehzahl
P	Leistung
P_S	Leistungssprung
p_B	Behälterdruck
p_V	Vordruck
Q_C	Kondensatorladung
$\dot{Q}$	Wärmestrom
$\dot{Q}_f$	Fremdwärmestrom
R	elektrischer Widerstand, Gaskonstante
RL	Rücklauf
s	Weg
T	absolute Temperatur, Zeitkonstante, Periodendauer
T_1	Zeitkonstante
T_t	Totzeit
t, t_x	Zeit, Zeitpunkt
U	elektrische Spannung
U_A	Ankerspannung
U_C	Kondensatorspannung
U_a	Ausgangsspannung
U_R	Spannungsabfall über R
U_1	Eingangsspannung
U_2	Ausgangsspannung
U_{1S}	Eingangsspannungssprung
V	Volumen
VL	Vorlauf
v	Geschwindigkeit
$\dot{V}$	Volumenstrom
$\dot{V}_S$	Volumenstromsprung
w	Sollwert, Führungsgröße
x	Regelgröße
$\hat{x}_e$, $\hat{x}_a$	Amplitude
x_a	Ausgangsgröße
x_{a0}	Ausgangsgröße für $x_e = 0$
x_e	Eingangsgröße
x_{eS}	Eingangsgrößensprung
x_d	Regeldifferenz
y	Stellgröße
z	Störgröße

α	Drehwinkel
Δ	Differenz
φ	Phasenwinkel
$\varphi(\omega)$	Phasengang
ω	Kreisfrequenz, Winkelgeschwindigkeit
ω_0	Bezugsfrequenz
ω_E	Eckfrequenz
ϑ	Temperatur
ϑ_H	Heißwassertemperatur
ϑ_K	Kaltwassertemperatur
ϑ_L	Temperatur im Lastkreis
ϑ_M	Mischwassertemperatur
ϑ_S	Temperatursollwert
ϑ_v	Vorlauftemperatur
ϑ_a	Außen-, Abflusstemperatur
ϑ_R	(gemessene) Raumtemperatur
ϑ_{R^*}	(wahre) Raumtemperatur
ϑ_z	Zuflusstemperatur

2.1 Einführung

Bild 2-1 zeigt schematisch den Aufbau eines Regelkreises zur Regelung der Raumtemperatur ϑ_R. Die linke Darstellung soll das Anlagenschema veranschaulichen, während die rechte Seite den geschlossenen Regelkreis mit seinen beiden Hauptkomponenten *Regelstrecke* und *Regler* zeigt. Wichtig an der rechten Darstellung ist, dass sie ausschließlich das Zusammenwirken von *Regelgröße*, *Stellgröße*, *Führungsgröße* (*Sollwert*) und *Störgrößen* zeigt. Diese Form wird auch als *Wirkungsplan* oder *Signalflussplan* bezeichnet, da aus diesem Bild lediglich der Weg der einzelnen Signale (hier Regelgröße x, Stellgröße y, Führungsgröße w und Störgrößen z_n) ersichtlich ist. So wird z. B. die Stellgröße vom Regler (Signalquelle) an den Eingang der Regelstrecke (Signalsenke) geführt. Die praktische Realisierung des Regelkreises, welches Stellventil verwendet wird, der Rohrquerschnitt, der verwendete Heizkörper usw. sind aus dieser Darstellung nicht ersichtlich.

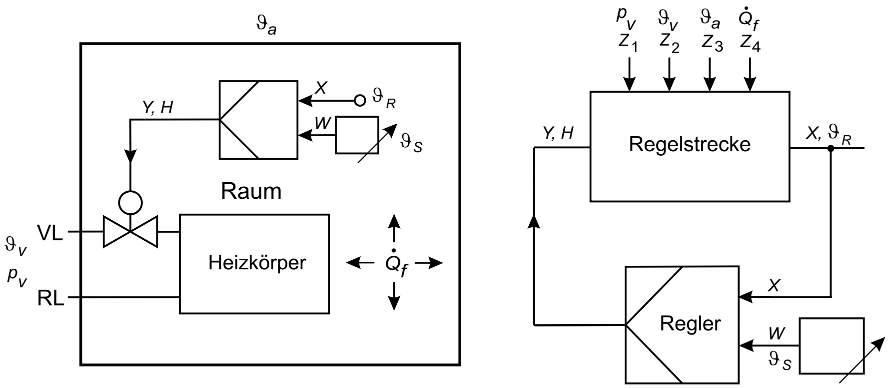

Bild 2-1: Schematische Darstellung eines Regelkreises zur Regelung der Raumtemperatur

VL:	Vorlauf	z_1, z_2, z_3, z_4:	Störgrößen
RL:	Rücklauf	p_V:	Vordruck
ϑ_R, x:	Raumtemperatur (Regelgröße)	ϑ_V:	Vorlauftemperatur
ϑ_S, w:	Sollwert der Raumtemperatur	ϑ_a:	Außentemperatur
y, H:	Ventilhub (Stellgröße)	$\dot{Q}_f$:	Fremdwärmestrom im Raum

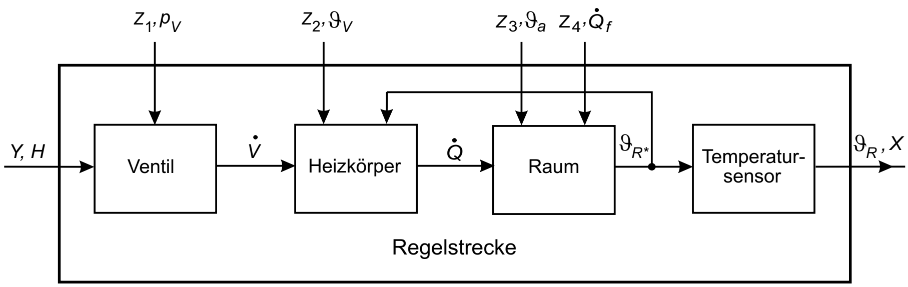

Bild 2-2: Detaillierter Signalflussplan für die Regelstrecke des Regelkreises nach Bild 2-1

H, y:	Ventilhub, Stellgröße	ϑ_a:	Außentemperatur
z:	Störgrößen	$\dot{Q}_f$:	Fremdwärmestrom im Raum
p_V:	Vordruck	ϑ_{R^*}:	tatsächlicher Wert der Raumtemperatur
ϑ_V:	Vorlauftemperatur	ϑ_R, x:	gemessene Raumtemperatur, Regelgröße
$\dot{Q}$:	vom Heizkörper abgegebener Wärmestrom		

Da sich Regler und Regelstrecke in der Praxis meist aus einer Vielzahl von Komponenten zusammensetzen, kann der Wirkungsplan für den Regelkreis, die Regelstrecke oder den Regler auch viel detaillierter ausgeführt werden, wie das Bild 2-2 für die Regelstrecke der oben erwähnten Raumtemperaturregelung zeigt. Diese Darstellung veranschaulicht den Signalfluss zwischen den Einzelkomponenten der Regelstrecke (Stellventil, Heizkörper, Raum, Messfühler). *Signale* sind in diesem Zusammenhang die *Werte* verschiedener physikalischer Größen, die als *Signalträger* wirken. Als Beispiele seien Stellgröße y (Signalträger ist eine elektrische Spannung), Ventilhub (Signalträger ist Weg), Volumenstrom $\dot{V}$ und Wärmestrom $\dot{Q}$ genannt. Der Signalfluss erfolgt in einer bestimmten, physikalisch vorgegebenen Richtung, die durch Pfeile angezeigt wird. Die Richtung des Signalflusses ergibt sich aus dem Ursache-Wirkung-Prinzip. So wird z. B. der Volumenstrom $\dot{V}$ durch den Ventilhub H und den Vordruck p_V bestimmt.

Eine Einzelkomponente in einem Regelkreis wird auch als *Regelkreisglied* bezeichnet. Jedes Regelkreisglied hat mindestens *einen* Ein- und *einen* Ausgang, es sind aber auch mehrere Ein- und/oder Ausgänge möglich. Wichtig ist, dass die Aufspaltung des Regelkreises in einzelne Regelkreisglieder zunächst willkürlich vorgenommen werden kann. Unter bestimmten Bedingungen kann es z. B. sinnvoll sein, die gesamte Regelstrecke als *ein* Regelkreisglied aufzufassen. Eingangsgrößen sind dann die Stellgröße y sowie die Störgrößen z_1, z_2, …, z_n. Ausgangsgröße ist in diesem Fall die Regelgröße x. In anderen Fällen kann eine feinere Unterscheidung verschiedener Regelkreisglieder sinnvoll sein. Als Beispiel sei der Temperatursensor im Bild 2-2 genannt: Die Eingangsgröße ist in diesem Fall die *tatsächliche* Raumtemperatur ϑ_{R^*}, die Ausgangsgröße ist das vom Sensor gelieferte elektrische Signal ϑ_R (gemessene Raumtemperatur oder die Regelgröße x).

Bild 2-3 zeigt das in der Regelungstechnik übliche Blocksymbol von Regelkreisgliedern. Dargestellt ist ein Regelkreisglied mit *zwei* Eingangssignalen x_{e1} und x_{e2} sowie *einem* Ausgangssignal x_a.

Bild 2-3: Blocksymbol eines Regelkreisgliedes
x_{e1}, x_{e2}: Eingangsgrößen
x_a: Ausgangsgröße

Worin liegt der Sinn dieser Betrachtungsweise? Ein einfacher Regelkreis setzt sich aus *Regelstrecke* und *Regeleinrichtung* (Regler) zusammen (siehe Bild 2-1). Die Aufgaben des Reglers lassen sich verbal relativ einfach beschreiben: Vergleich der Regelgröße x mit dem Sollwert w und aus der Differenz dieser beiden Größen (Regeldifferenz $x_d = w - x$) Berechnung der Stellgröße y. Wie die Berechnung der Stellgröße y erfolgt, hängt von der Regeleinrichtung bzw. von dem in dieser Regeleinrichtung implementierten Regelalgorithmus ab.

An dieser Stelle wird die Grundaufgabe der Regelungstechnik deutlich, nämlich zu einer *vorgegebenen* Regelstrecke einen Regler zu finden, mit dem der geschlossene Regelkreis, bestehend aus Regelstrecke und Regler (siehe Bild 2-1), optimal arbeitet. Was heißt aber „optimal arbeiten"? Die Beantwortung dieser Frage hängt von der Zielstellung ab, die mit dem Regelkreis verfolgt wird. Zwei für die Praxis wichtige Fälle sind:

- Die Regelgröße x soll trotz großer Schwankungen der Störgrößen z_n konstant bleiben, solange der Sollwert w (Führungsgröße) konstant ist. Als Beispiel sei die Einhaltung einer konstanten Temperatur genannt. In diesem Fall werden der Regelalgorithmus bzw. die dem Regelalgorithmus zugrunde liegenden Reglerparameter mit dem Ziel eines *optimalen Störverhaltens* des Regelkreises ausgewählt.
- Die Regelgröße soll möglichst verzögerungsfrei der Führungsgröße w folgen, wobei die Störgrößen z_n keiner oder nur einer geringen Veränderung unterliegen. Als Beispiel sei die Realisierung eines vorgegebenen Temperatur-Zeit-Verlaufs genannt. In diesem Fall werden der Regelalgorithmus bzw. die dem Regelalgorithmus zugrunde liegenden Reglerparameter mit dem Ziel eines *optimalen Führungsverhaltens* des Regelkreises ausgewählt.

Der einzusetzende Regler bzw. Regelalgorithmus hängt damit von den Eigenschaften der (in der Praxis meist vorgegebenen) Regelstrecke und vom angestrebten Verhalten des geschlossenen Regelkreises ab. Eine hinreichend genaue *mathematische Beschreibung der Eigenschaften der Regelstrecke* stellt daher *eine* Voraussetzung für die optimale Auswahl bzw. Einstellung eines Reglers dar. Die mathematische Beschreibung der Eigenschaften eines vorgegebenen Systems (z. B. Regelstrecke) wird in der Regelungstechnik auch als *Modellbildung* oder *Identifikation* bezeichnet.

Da jede Regelstrecke aus einem oder mehreren Regelkreisgliedern besteht, ist die mathematische Beschreibung der Eigenschaften von Regelkreisgliedern *eine* wichtige Voraussetzung für die Beschreibung der Streckeneigenschaften bzw. für die Lösung der oben umrissenen Grundaufgabe der Regelungstechnik.

Es gibt eine Vielzahl von Möglichkeiten, die Eigenschaften von Regelkreisgliedern mathematisch zu beschreiben (z. B. Differenzialgleichung, Übertragungsfunktion). In den weiteren Betrachtungen sollen das *Beharrungsverhalten* sowie das *Zeitverhalten* von elementaren Regelkreisgliedern im Mittelpunkt stehen. Anhand des Beharrungs- und des Zeitverhaltens können die Eigenschaften von Regelkreisgliedern für viele Anwendungsfälle in der Versorgungstechnik hinreichend genau erfasst werden. Hinzu kommt der Vorteil, dass Beharrungs- und Zeitverhalten relativ einfach experimentell untersucht werden können.

2.2 Beharrungsverhalten (statisches Verhalten) von Regelkreisgliedern

Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen sei ein Temperatursensor mit elektrischem Ausgangssignal (siehe Bild 2-4). Eingangsgröße dieses Regelkreisgliedes ist die Temperatur ϑ, Ausgangsgröße ist eine elektrische Spannung U_a ($0 \le U_a \le 10$ V). Dieses Regelkreisglied enthält neben dem eigentlichen Sensorelement noch eine elektronische Schaltung, die das Sensorsignal erfasst, verstärkt, linearisiert sowie die Messbereichsgrenzen festlegt.

Ist die Eingangsgröße dieses Regelkreisgliedes konstant (z. B. durch Eintauchen des Sensors in ein Wasserbad *konstanter* Temperatur), so wird nach geraumer Zeit – der Sensor muss erst die Temperatur des Wasserbades annehmen – das Ausgangssignal ebenfalls konstant sein. Dieser Zustand, dass bei konstantem Eingangssignal das Ausgangssignal ebenfalls konstant ist, wird als *Beharrungszustand* oder als *eingeschwungener* bzw. *stationärer Zustand* bezeichnet. Das *Beharrungsverhalten* ist dann die Abhängigkeit der Ausgangsgröße x_a eines Regelkreisgliedes von der Eingangsgröße x_e *im Beharrungszustand*.

Bild 2-4 zeigt das Beharrungsverhalten des Temperatursensors. Auch wenn der eigentliche Temperatursensor ein nichtlineares Verhalten zeigt (z. B. Platinwiderstand Pt100), ergibt sich durch die eingebaute elektronische Schaltung ein *lineares* Beharrungsverhalten, das im Bereich $-20\ °C \le \vartheta \le 80\ °C$ durch folgende Geradengleichung beschrieben werden kann:

$$U_a = 2\ \mathrm{V} + 0{,}1\,\frac{\mathrm{V}}{°\mathrm{C}} \cdot \vartheta \qquad (2\text{-}1)$$

Allgemein gilt für lineares Beharrungsverhalten folgender Ausdruck:

$$x_a = x_{a0} + K_P \cdot x_e \qquad (2\text{-}2)$$

x_{a0} gibt den Wert der Ausgangsgröße im Beharrungszustand bei $x_e = 0$ an. Die Größe K_P wird *Proportionalbeiwert* des Regelkreisgliedes genannt.

Sie entspricht dem Anstieg der Geraden und kann nach folgender Formel berechnet werden:

$$K_P = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e} \qquad (2\text{-}3)$$

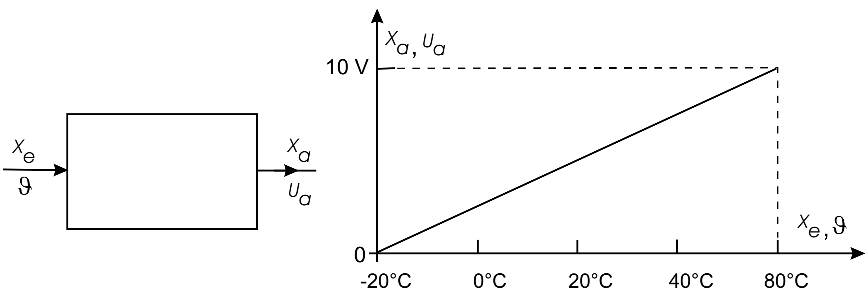

Bild 2-4: Beharrungsverhalten eines Temperatursensors

Δx_e ist eine angenommene oder im Experiment tatsächlich realisierte Änderung der Eingangsgröße, Δx_a die entsprechende Änderung der Ausgangsgröße *im Beharrungszustand*. Für den hier diskutierten Temperatursensor sind $K_P = 0{,}1$ V/°C und $x_{a0} = 2$ V.

Die oben angeführten Formeln können für Regelkreisglieder mit *mehreren* Eingängen und *linearem* Beharrungsverhalten übertragen werden. Für ein Regelkreisglied mit *n* Eingängen und *einem* Ausgang gilt dann folgender Ausdruck:

$$x_a = x_{a0} + K_{P1} \cdot x_{e1} + K_{P2} \cdot x_{e2} + \ldots + K_{Pn} \cdot X_{en} \quad \text{mit} \quad K_{Pn} = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_{en}} \tag{2-4}$$

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde *lineares* Beharrungsverhalten vorausgesetzt. In der Praxis gibt es jedoch viele Regelkreisglieder, deren Beharrungsverhalten *nichtlinear* ist. Bild 2-5 zeigt das Beharrungsverhalten eines Wärmeübertragers. Eingangsgröße x_e ist der Ventilhub H, Ausgangsgröße x_a ist die gemessene Temperatur im Lastkreis ϑ_L. Zur Aufnahme des Beharrungsverhaltens wird ein bestimmter Hub H_1 eingestellt und anschließend der Wert der Temperatur im Lastkreis *im Beharrungszustand* ϑ_{L1} bestimmt. Daraus resultiert ein Wertepaar (H_1, ϑ_{L1}). Durch schrittweise Veränderung des Hubes kann so das Beharrungsverhalten im gesamten Hubbereich (0 bis 100 %) bestimmt und grafisch dargestellt werden. Wichtig ist, dass bei der Aufnahme des Beharrungsverhaltens *alle* Störgrößen konstant gehalten werden. Wird zusätzlich eine Störgröße variiert, ist das Resultat in einer *Kurvenschar* darstellbar.

Wie Bild 2-5 zeigt, ist das Beharrungsverhalten stark nichtlinear. Eine mathematische Beschreibung dieses Verhaltens im gesamten Temperatur- bzw. Hubbereich, z. B. durch ein Polynom, wäre relativ aufwendig. In der Praxis wird daher ein anderer Weg beschritten: Häufig ist es ausreichend, das Beharrungsverhalten lediglich *in der Umgebung eines festen Arbeitspunktes* (AP) mathematisch zu beschreiben. Dazu kann näherungsweise die Tangente im Arbeitspunkt verwendet werden. Bild 2-5 zeigt die Tangenten für zwei verschiedene Arbeitspunkte AP_1 und AP_2.

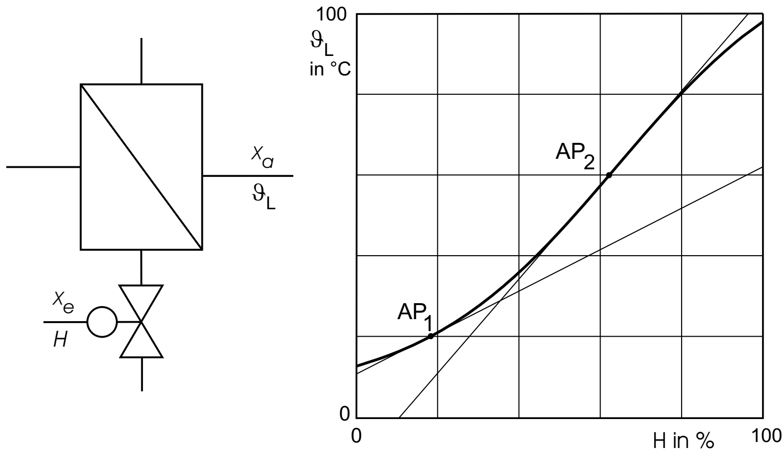

Bild 2-5: Beharrungsverhalten eines Wärmeübertragers.
x_e, H: Eingangsgröße (Ventilhub)
x_a, ϑ_L: Ausgangsgröße (Temperatur im Lastkreis)
AP_1, AP_2: Arbeitspunkte

Für die Tangentengleichung (abgeleitet aus der Punkt-Steigungs-Form einer Geradengleichung) gilt allgemein:

$$x_{\mathrm{a}} = x_{\mathrm{aAP}} + K_{\mathrm{P}} \cdot (x_{\mathrm{e}} - x_{\mathrm{eAP}}) \tag{2-5}$$

K_{P} ist der (arbeitspunktabhängige) Anstieg der Tangente, er wird wiederum als Proportionalbeiwert bezeichnet. x_{eAP} und x_{aAP} sind die Werte der Ein- und Ausgangsgröße im entsprechenden Arbeitspunkt *im Beharrungszustand*. Da der Anstieg der Tangente identisch mit dem Wert der 1. Ableitung des Beharrungsverhaltens im Arbeitspunkt ist, gilt für K_{P}:

$$K_{\mathrm{P}} = \left.\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{a}}(x_{\mathrm{e}})}{\mathrm{d}x_{\mathrm{e}}}\right|_{x_{\mathrm{e}} = x_{\mathrm{eAP}}} \tag{2-6}$$

Bei vielen praktischen Problemen liegt für das Beharrungsverhalten $x_{\mathrm{a}} = f(x_{\mathrm{e}})$ *kein* geschlossener analytischer Ausdruck (Formel) vor, sodass K_{P} nicht durch Differenziation nach Gleichung (2-6), sondern nur grafisch aus dem Anstieg der Tangente bestimmt werden kann. Für die beiden Arbeitspunkte AP_1 und AP_2 im Bild 2-5 gelten folgende Tangentengleichungen und Proportionalbeiwerte, die grafisch bestimmt wurden:

$$\mathrm{AP}_1\colon\ \vartheta_{\mathrm{L}} = 20\,°\mathrm{C} + 0{,}51\,\frac{°\mathrm{C}}{\%} \cdot \left(H - 18{,}5\,\%\right),\quad K_{\mathrm{P1}} = 0{,}51\,\frac{°\mathrm{C}}{\%} \tag{2-7}$$

$$\mathrm{AP}_2\colon\ \vartheta_{\mathrm{L}} = 60\,°\mathrm{C} + 1{,}16\,\frac{°\mathrm{C}}{\%} \cdot \left(H - 62{,}4\,\%\right),\quad K_{\mathrm{P2}} = 1{,}16\,\frac{°\mathrm{C}}{\%} \tag{2-8}$$

Gleichung (2-7) beschreibt das Beharrungsverhalten *in der Umgebung* des AP_1, Gleichung (2-8) *in der Umgebung* des AP_2.

Im Hinblick auf das Verhalten des geschlossenen Regelkreises ist insbesondere der Proportionalbeiwert K_{P} von großer Bedeutung, wie folgende einfache Überlegung zeigen soll:

Arbeitet der Regelkreis in der Umgebung vom AP_1 ($K_{\mathrm{P1}} = 0{,}51$ °C/%) und beträgt die Regeldifferenz zum Beispiel 2 °C ($x_{\mathrm{d}} = w - x = 2$ °C), so müsste der Regler theoretisch den Hub des Stellventils um 3,9 % erhöhen, damit Soll- und Istwert im Beharrungszustand übereinstimmen. Im AP_2 ($K_{\mathrm{P1}} = 1{,}16$ °C/%) wäre jedoch bei einer Regeldifferenz von 2 °C eine Erhöhung des Hubes um 1,7 % völlig ausreichend. Würde der Regler im AP_2 den Hub anstelle von 1,7 % um 3,9 % erhöhen (wie im AP_1 erforderlich), so hätte das im Beharrungszustand eine Temperaturerhöhung um 4,5 °C zur Folge, was 2,5 °C zu viel sind, d. h., die Abweichung zwischen Soll- und Istwert würde *vergrößert*! Mit dieser einfachen Betrachtung soll deutlich gemacht werden, wie wichtig die Kenntnis des Proportionalbeiwertes K_{P} der Regelstrecke im entsprechenden Arbeitspunkt ist. Deutlich wird auch, wie das Beharrungsverhalten eines komplexen thermischen und hydraulischen Systems in der Umgebung eines Arbeitspunktes durch *eine* Konstante – den Proportionalbeiwert K_{P} – ausreichend genau mathematisch beschrieben werden kann.

Die hier gemachten Überlegungen lassen sich auch auf das Beharrungsverhalten von Regelkreisgliedern mit *mehreren* Eingangssignalen (n Eingangssignale: $x_{\mathrm{e1}}, x_{\mathrm{e2}}, \ldots, x_{\mathrm{en}}$) und *einem* Ausgangssignal ($x_{\mathrm{a}} = f(x_{\mathrm{e1}}, x_{\mathrm{e2}}, \ldots, x_{\mathrm{en}})$) übertragen. Bei mehreren Eingangssignalen kann nichtlineares Beharrungsverhalten in der Umgebung eines Arbeitspunktes AP nach folgender Gleichung durch eine lineare Funktion angenähert werden: