

Theoretische Physik

Band 11

Walter Greiner
Joachim Maruhn

Kernmodelle



Verlag Harri Deutsch

Theoretische Physik
Band 11
Walter Greiner/Joachim Maruhn
Kernmodelle

Kern- modelle

Ein Lehr- und Übungsbuch

Mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen
und Aufgaben zum Nachdenken



Verlag Harri Deutsch

Walter Greiner

Theoretische Physik

- Band 1: Mechanik, Teil 1
- Band 2: Mechanik, Teil 2
- Band 3: Elektrodynamik
- Band 4: Quantenmechanik, Teil 1: Einführung
- Band 5: Quantenmechanik, Teil 2: Symmetrien
- Band 6: Relativistische Quantenmechanik, Wellengleichungen
- Band 7: Quantenelektrodynamik
- Band 8: Eichtheorie der schwachen Wechselwirkung
- Band 9: Thermodynamik und Statistische Mechanik
- Band 10: Quantenchromodynamik
- Band 11: Kernmodelle

Ergänzungsbände

- Band 2A: Hydrodynamik
- Band 3A: Spezielle Relativitätstheorie
- Band 4A: Quantentheorie, Spezielle Kapitel
- Band 7A: Feldquantisierung

In Vorbereitung:

- Physik der Elementarteilchen, Theoretische Grundlagen
- Modelle der Elementarteilchen
- Quantenstatistik
- Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitation

Theoretische Physik
Band 11

Walter Greiner
Joachim Maruhn

Kern- modelle

Ein Lehr- und Übungsbuch

Mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen
und Aufgaben mit ausführlichen Lösungen



Verlag Harri Deutsch

Professor Dr. rer. nat. Dr. h. c. mult. Walter Greiner ist Direktor des Instituts für Theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main.

Professor Dr. phil. nat. Joachim A. Maruhn ist Professor am Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main.

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Theoretische Physik: ein Lehr- und Übungsbuch. - Thun ;
Frankfurt am Main : Deutsch

Bd. 11. Greiner, Walter: Kernmodelle. - 1995

Greiner, Walter:

Kernmodelle : ein Lehr- und Übungsbuch ;
mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben mit ausführlichen Lösungen
/ Walter Greiner ; Joachim Maruhn. - Thun ; Frankfurt am Main :
Deutsch, 1995

(Theoretische Physik ; Bd. 11)

ISBN 3-87144-977-6

NE: Maruhn, Joachim:

ISBN 3-87144-977-6

1. Auflage, 1995

© 1995 Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches - oder von Teilen daraus - sind vorbehalten.

Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden.

Zu widerhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren, Herausgeber und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

Druck: Fuldaer Verlagsanstalt, Fulda

Vorwort

Die Theoretische Physik ist eine umfangreiche, breit gefächerte Wissenschaft geworden. Es ist für den jungen Studenten schwer, vor der Fülle des zu Erlernenden nicht zurückzuschrecken und sich vielmehr systematisch einen Überblick über das weite Feld von der Mechanik über die Elektrodynamik, die Quantentheorie, Feldtheorie, Kern- und Schwerionenphysik, Thermodynamik und statistische Mechanik, Festkörperphysik bis hin zur Physik der Elementarteilchen zu verschaffen.

Dies alles soll außerdem in acht bis zehn Semestern einschließlich einer ordentlichen Diplomarbeit geschafft werden. Dies ist nur möglich, wenn die akademischen Lehrer mithelfen, die Studenten frühzeitig in die neuen Disziplinen einzuweihen, Interesse und Begeisterung zu wecken, wodurch wichtige zusätzliche Energien frei werden.

An der Johann Wolfgang Goethe-Universität zu Frankfurt am Main haben wir daher schon seit 1965 die Theoretische Physik in das 1. Studiensemester vorverlegt. Darum werden die Mechanik 1 und 2, die Elektrodynamik und die Einführung in die Quantentheorie in einem Grundkurs vor dem Vordiplom in Verbindung mit vielen mathematischen Erläuterungen und Ergänzungen gelehrt. Nach dem 4. Semester sind Quantentheorie 2, Thermodynamik und Statistische Physik, Relativistische Quantentheorie und Quantenelektrodynamik (Einführung in die Quantenfeldtheorie) Pflichtvorlesungen. Neben diesem Grundkurs durch die Theoretische Physik werden eine ganze Reihe Ergänzungen und Spezialvorlesungen regelmäßig angeboten. Dazu gehören beispielsweise die Hydrodynamik, klassische Feldtheorie, Theoretische Optik, Theorie der Streuprozesse, Allgemeine Relativitätstheorie, Theorie der schwachen Wechselwirkung, Theorie der Elementarteilchen usw. Einige davon wie z. B. die zweisemestrigen Vorlesungen über Theoretische Kernphysik bzw. Theoretische Festkörperphysik gehören auch zu den Pflichten für das Diplom in Physik.

In dem vorliegenden Band wird die Theorie der Kernmodelle behandelt, die zusammen mit der der Kernreaktionen einen zweisemestrigen Zyklus bildet. Für dieses Gebiet erschien es uns besonders wichtig, ein kurzes zur Begleitung einer Vorlesung geeignetes Buch zusammenzustellen, da es zwar hervorragende und umfassende Darstellungen der Kernmodelle gibt, diese jedoch durch ihre überwältigende Materialfülle jedoch für die Studenten zunächst sehr unübersichtlich wirken. In diesem Zusammenhang sind besonders das dreibändige Werk von Eisenberg und Greiner¹, auf dem unsere Darstellung in vielen Punkten beruht, sowie der Band von Ring und Schuck², der mehr Gewicht auf die Vielteilchenmethoden legt.

Ein Buch zur Vorlesung muß sich jedoch auf die wichtigsten Punkte beschränken, den Schwerpunkt auf die Erklärung der Ideen und Methoden legen und dafür auf die Präsentation einer Fülle von Einzelergebnissen verzichten, die sich für die Vorlesung sowieso nicht eignen, wenn diese nicht zu einer Diapositiv-Vorführung entarten soll. Die Theorie der Kernmodelle unterscheidet sich natürlich vom klassischen Kanon der

¹J. M. Eisenberg and W. Greiner, *Nuclear Theory*, 3 Volumes, Third Edition (North Holland, Amsterdam 1973–1987).

²P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem* (Springer-Verlag, New York 1980).

Theoretischen Physik auch dadurch, daß sehr wenige Beispiele vollständig ausgerechnet werden können, ohne Computer zu verwenden.

Aus diesen Gründen steht die Diskussion der wichtigsten Typen von Modellen nebst den zugehörigen mathematischen Methoden im Vordergrund. Da die Erfahrung zeigt, daß die Studenten die für Kernmodelle wichtigen Methoden der Drehimpulskopplung und der zweiten Quantisierung meist nur unsicher beherrschen, haben wir diese Themen nicht in einen Anhang relegiert, sondern an den Anfang gestellt — ggf. kann darauf natürlich verzichtet werden. Auch hierbei wurde darauf geachtet, den Stoff auf das für das Folgende Notwendige zu beschränken. Daran schließt sich eine kurze Diskussion der gruppentheoretischen Methoden an, die etwa für das IBA-Modell wichtig sind.

Das fünfte Kapitel behandelt die Theorie des Strahlungsfeldes bis zu den Definitionen der Übergangswahrscheinlichkeiten. Dabei wurde, wieder im Hinblick auf Straffung des Stoffes, die Diskussion der magnetischen Übergänge nur allgemein behandelt. Das anschließende sechste Kapitel stellt die klassischen Kollektivmodelle vor, die wegen ihres didaktischen Wertes und ihrer grundlegenden Bedeutung für die Begriffsbildung den Schwerpunkt des Buches darstellen. Einer kurzen Darstellung der phänomenologischen Eigenschaften der Kernmaterie folgt die Behandlung des geometrischen Kollektivmodells (Oberflächenschwingungen, Rotations-Vibrations-Modell usw.) in den verschiedenen Grenzfällen, das IBA-Modell und die kollektive Theorie der Riesenresonanzen.

Kaum geringeren Raum nimmt die Theorie der mikroskopischen Modelle in Kapitel 7 ein. Hier werden die wichtigsten Themen, von der Hartree-Fock-Theorie über phänomenologische Einteilchenmodelle bis hin zur modernen relativistischen Mesonenfeldtheorie eingeführt. Der nächste Abschnitt behandelt die Kombination von Einteilchen- und Kollektivbewegung, einmal in Form des Teilchen-plus-Core-Konzeptes sowie im Hinblick auf die mikroskopische Beschreibung kollektiver Schwingungen.

Im abschließenden Kapitel über Kollektivbewegungen großer Amplitude schließlich werden einige Verfahren zur Behandlung der Spaltung und ähnlicher Prozesse erläutert. Dazu gehören Zweizentrenmodelle, die allgemeine Problematik der Massenparameter, zeitabhängiges Hartree-Fock und die Generatorkoordinatenmethode, denen sich noch ein elementarer Überblick über Hochspinzustände anschließt.

Das Buch enthält neben dem klassischen und heute noch zum Grundwissen des theoretischen Kernphysikers gehörenden Kanon von Kernmodellen immer wieder auch Themen von aktuellem Interesse — so zu den überschweren Elementen, kalter Spaltung und kalter Fusion, Clusterradioaktivitäten, Hochspinzuständen oder zur relativistischen Mesonenfeldtheorie —, die jungen Physikern die bleibende Faszination an der Kernstrukturphysik vermitteln. Gleichzeitig sollte auch an vielen Stellen zu spüren sein, daß das Buch auf wiederholten Vorlesungen beruht und in vielen Details bei den Erklärungen typische Fragen der Studenten aufgreift und erklärt.

Wir bedanken uns herzlich bei unseren Mitarbeitern Dr. Dirk Troltenier, Christian Spieles, Klemens Rutz und Michael Bender für ihre Mithilfe bei der Erstellung, Formatierung, Übersetzung und Bearbeitung des Textes sowie bei Frau Astrid Steidl für Unterstützung bei der Erstellung einiger Grafiken.

Schließlich möchten wir die Hoffnung aussprechen, daß auch diese Vorlesung viele Freunde finde.

Frankfurt am Main, Mai 1995

Joachim Maruhn

Walter Greiner

I	Einleitung	1
1.1	Kennzeichenregeln	1
1.2	Die grundlegenden Gleichungen	3
1.3	Mikroskopische vs. makroskopische Methoden	3
1.4	Die Rolle von Symmetrien	5
II	Symmetrien	15
2.1	Generelle Drehungen	17
2.2	Translationen	18
2.2.1	Der Operator der Translation	18
2.2.1.1	Translationen in x -Richtung	18
2.2.1.2	Translationen in y -Richtung	19
2.2.1.3	Translationen in z -Richtung	19
2.2.2	Vielfachensysteme	20
2.3	Drehungen	21
2.3.1	Die Drehungsoperatoren	21
2.3.2	Herleitung der Drehungen	23
2.3.3	Die Drehmatrizen	24
2.3.4	SO(3) und SU(2)	25
2.3.5	Drehungsalgebra	25
2.3.6	Isomorphe Darstellungen	27
2.3.7	Tensorprodukte	27
2.3.8	Die Wigner-Darstellung	28
2.3.9	Die GJ- und GY-Symbole	31
2.4	Der Isospin	34
2.5	Die Parität	37
2.5.1	Teilchen	37
2.5.2	Antiteilchen	38
2.6	Die Zeitumkehr	40

schwierigeren Fällen wird bei Bedarf eine zusätzliche, nicht in diesem Buch behandelte, Literaturangabe angegeben.

Auf diese Weise stellt die Diskussion der wichtigsten Typen von Modellen einen guten Überblick über die Diskussion der wichtigsten Typen von Modellen dar. Die Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden im Zusammenhang mit der Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden ist ebenfalls ein wichtiger Bestandteil der Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden. Die Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden ist ebenfalls ein wichtiger Bestandteil der Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden. Die Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden ist ebenfalls ein wichtiger Bestandteil der Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden.

Das fünfte Kapitel behandelt die Theorie der Strahlungsfelder. In diesem Kapitel wird die Übergangswahrscheinlichkeiten, die in der Theorie der Strahlungsfelder eine wichtige Rolle spielen, diskutiert. Die Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden ist ebenfalls ein wichtiger Bestandteil der Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden. Die Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden ist ebenfalls ein wichtiger Bestandteil der Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden.

Das sechste Kapitel behandelt die Theorie der nichtrelativistischen Modelle in Kapitel 7. In diesem Kapitel werden die wichtigsten Themen der nichtrelativistischen Modelle diskutiert. Die Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden ist ebenfalls ein wichtiger Bestandteil der Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden. Die Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden ist ebenfalls ein wichtiger Bestandteil der Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden.

Das siebte Kapitel über Relativitätstheorien enthält eine ausführliche Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden. Die Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden ist ebenfalls ein wichtiger Bestandteil der Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden. Die Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden ist ebenfalls ein wichtiger Bestandteil der Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden.

Das achte Kapitel enthält eine Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden. Die Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden ist ebenfalls ein wichtiger Bestandteil der Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden. Die Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden ist ebenfalls ein wichtiger Bestandteil der Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden.

Die Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden ist ebenfalls ein wichtiger Bestandteil der Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden. Die Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden ist ebenfalls ein wichtiger Bestandteil der Diskussion der verschiedenen mathematischen Methoden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Kernstrukturphysik	1
1.2	Die grundlegende Gleichung	2
1.3	Mikroskopische vs. kollektive Modelle	3
1.4	Die Rolle von Symmetrien	5
2	Symmetrien	7
2.1	Generelle Bemerkungen	7
2.2	Translation	8
2.2.1	Der Operator der Translation	8
2.2.2	Translationsinvarianz	10
2.2.3	Vielteilchensysteme	10
2.3	Drehungen	12
2.3.1	Die Drehimpulsoperatoren	12
2.3.2	Darstellungen der Drehgruppe	18
2.3.3	Die Drehmatrizen	22
2.3.4	SU(2) und Spin	24
2.3.5	Drehimpulskopplung	29
2.3.6	Intrinsischer Drehimpuls	31
2.3.7	Tensoroperatoren	35
2.3.8	Das Wigner–Eckart–Theorem	40
2.3.9	Die $6j$ - und $9j$ -Symbole	42
2.4	Der Isospin	44
2.5	Die Parität	47
2.5.1	Definition	47
2.5.2	Vektorfelder	48
2.6	Die Zeitumkehr	49

3 Die zweite Quantisierung	53
3.1 Allgemeiner Formalismus	53
3.1.1 Motivation	53
3.1.2 Zweite Quantisierung für Bosonen	57
3.1.3 Zweite Quantisierung für Fermionen	59
3.2 Darstellung von Operatoren	61
3.2.1 Einteilchenoperatoren	61
3.2.2 Zweiteilchenoperatoren	64
3.2.3 Auswertung von Matrixelementen für Fermionen	66
3.3 Das Teilchen-Loch-Bild	68
4 Gruppentheorie in der theoretischen Kernphysik	72
4.1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren	72
4.2 Gruppenketten	79
4.2.1 Lie-Algebren in zweiter Quantisierung	81
5 Elektromagnetische Momente und Übergänge	83
5.1 Allgemeines	83
5.2 Quantisierung des Feldes	83
5.3 Strahlungsfelder guten Drehimpulses	86
5.3.1 Lösungen der skalaren Helmholtzgleichung	86
5.3.2 Lösungen der Vektor-Helmholtzgleichung	87
5.3.3 Eigenschaften der Multipolfelder	89
5.3.4 Multipolentwicklung ebener Wellen	91
5.4 Kopplung von Strahlung und Materie	94
5.4.1 Grundlegende Matrixelemente	94
5.4.2 Multipolentwicklung der Matrixelemente und Auswahlregeln	97
5.4.3 Das Theorem von Siegert	99
5.4.4 Matrixelemente für die Emission im Niederenergiebereich	101
5.4.5 Relative Wichtigkeit der Übergänge und Weißkopf-Abschätzung	104
5.4.6 Elektrische Multipolmomente	107
5.4.7 Effektive Ladungen	107

6 Kollektivmodelle	109
6.1 Kernmaterie	109
6.1.1 Massenformeln	109
6.1.2 Das Fermigas-Modell	111
6.1.3 Dichtefunktional-Modelle	114
6.2 Deformationen der Kernoberfläche	117
6.2.1 Allgemeine Parametrisierung	117
6.2.2 Arten von Multipoldeformationen	119
6.2.3 Quadrupoldeformationen	122
6.2.4 Symmetrien im kollektiven Raum	128
6.3 Oberflächenschwingungen	130
6.3.1 Schwingungen eines klassischen Flüssigkeitstropfens	130
6.3.2 Der harmonische Quadrupoloszillator	138
6.3.3 Der kollektive Drehimpulsoperator	142
6.3.4 Der kollektive Quadrupoloperator	145
6.3.5 Das Quadrupol-Vibrationspektrum	147
6.4 Rotierende Kerne	153
6.4.1 Der starre Rotator	153
6.4.2 Der symmetrische Rotator	158
6.4.3 Der asymmetrische Rotator	161
6.5 Das Rotations-Vibrations-Modell	164
6.5.1 Klassische Energie	164
6.5.2 Der quantisierte Hamiltonoperator	168
6.5.3 Spektrum und Eigenfunktionen	173
6.5.4 Momente und Übergangswahrscheinlichkeiten	177
6.6 γ -instabile Kerne	186
6.7 Allgemeinere Kollektivmodelle für Oberflächenschwingungen	188
6.7.1 Das verallgemeinerte Kollektivmodell	188
6.7.2 Proton-Neutron-Schwingungen	196
6.7.3 Höhere Multipole	197
6.8 Das IBA-Modell	198
6.8.1 Einführung	198
6.8.2 Der Hamiltonoperator	200

6.8.3	Gruppenketten	203
6.8.4	Die Casimirooperatoren	205
6.8.5	Die dynamischen Symmetrien	208
6.8.6	Übergangsoperatoren	213
6.8.7	Erweiterte Versionen des IBA	215
6.8.8	Vergleich mit dem geometrischen Modell	217
6.9	Riesenresonanzen	219
6.9.1	Einführung	219
6.9.2	Das Goldhaber–Teller–Modell	222
6.9.3	Das Steinwedel–Jensen–Modell	224
6.9.4	Anwendungen	229
7	Mikroskopische Modelle	231
7.1	Die Nukleon–Nukleon–Wechselwirkung	231
7.1.1	Allgemeine Eigenschaften	231
7.1.2	Die funktionale Form	235
7.1.3	Wechselwirkungen aus Nukleon–Nukleon–Streuung	236
7.1.4	Effektive Wechselwirkungen	239
7.2	Die Hartree–Fock–Näherung	242
7.2.1	Einführung	242
7.2.2	Das Variationsprinzip	243
7.2.3	Die Slater–Determinanten–Näherung	245
7.2.4	Die Hartree–Fock–Gleichungen	246
7.2.5	Anwendungen	252
7.2.6	Die Dichte–Matrix–Formulierung	254
7.2.7	Hartree–Fock mit Zwangsbedingungen	257
7.2.8	Alternative Formulierungen und Dreikörperkräfte	258
7.2.9	Hartree–Fock mit Skyrme–Kräften	259
7.3	Phänomenologische Einteilchenmodelle	265
7.3.1	Das sphärische Schalenmodell	265
7.3.2	Das deformierte Schalenmodell	277
7.4	Das Relativistische Mean–Field–Modell	292
7.4.1	Einführung	292
7.4.2	Die Formulierung des Modells	293

7.4.3	Anwendungen	298
7.5	Paarkraft	301
7.5.1	Motivation	301
7.5.2	Das Senioritätsmodell	305
7.5.3	Das Quasispin-Modell	311
7.5.4	Das BCS-Modell	313
7.5.5	Die Bogolyubov-Transformation	319
7.5.6	Verallgemeinerte Dichtematrizen	325
8	Wechselspiel von kollektiver und Einteilchen-Bewegung	328
8.1	Die Rumpf-plus-Teilchen-Modelle	328
8.1.1	Grundlegende Überlegungen	328
8.1.2	Der Grenzfall der schwachen Kopplung	330
8.1.3	Die Näherung der starken Kopplung	332
8.1.4	Das Wechselwirkende Boson-Fermion-Modell (IBFM)	339
8.2	Kollektive Vibrationen in mikroskopischen Modellen	340
8.2.1	Die Tamm-Dancoff-Näherung	340
8.2.2	Die Random-Phase-Approximation (RPA)	346
8.2.3	Zeitabhängiges Hartree-Fock und Linear Response	349
9	Kollektivbewegungen großer Amplitude	355
9.1	Grundlagen	355
9.2	Die makroskopisch-mikroskopische Methode	356
9.2.1	Das Tropfenmodell	356
9.2.2	Die Schalenkorrekturmethode	358
9.2.3	Zweizentren-Schalenmodelle	363
9.2.4	Spaltung in selbstkonsistenten Modellen	375
9.3	Massenparameter und das Kurbelmodell	378
9.3.1	Übersicht	378
9.3.2	Das Modell des wirbelfreien Flusses	378
9.3.3	Das Kurbelmodell	379
9.3.4	Anwendungen des Kurbelmodells	381
9.4	Zeitabhängiges Hartree-Fock	385
9.5	Die Generatorkoordinatenmethode	387
9.6	Hochspinzustände	395
9.6.1	Übersicht	395
9.6.2	Das rotierende Nilsson-Modell	398

Anhang: Einige Gleichungen aus der Drehimpulstheorie	403
Literaturverzeichnis	406

Aufgaben und Beispiele

Aufgabe:	2.1	Die kartesische Form des Drehimpulsoperators J_z	13
Aufgabe:	2.2	Drehmatrix in der Cayley–Klein–Darstellung	28
Aufgabe:	2.3	Kopplung zweier Vektoren zu gutem Gesamtdrehimpuls	36
Beispiel:	2.4	Der Ortsoperator als irreduzibler sphärischer Tensoroperator	38
Beispiel:	2.5	Vertauschungsrelationen des Ortsoperators	39
Beispiel:	2.6	Das Zwei–Nukleonen–System	46
Aufgabe:	2.7	Der Zeitumkehroperator für Spinoren mit Spin $\frac{1}{2}$	52
Aufgabe:	3.1	Zweiteilchenoperator in der zweiten Quantisierung	64
Aufgabe:	4.1	Die Lie–Algebra der Drehimpulsoperatoren	76
Aufgabe:	4.2	Der Casimiroperator der Drehimpulsalgebra	77
Aufgabe:	4.3	Die Lie–Algebra für die Gruppe $SO(n)$	78
Aufgabe:	5.1	Die Vektorkugelfunktion $Y_{00,1}(\Omega)$	87
Aufgabe:	5.2	Die Weißkopf–Abschätzung	106
Aufgabe:	6.1	Volumen und Schwerpunkt eines deformierten Kerns	121
Aufgabe:	6.2	Quadrupoldeformationen	125
Aufgabe:	6.3	Drehimpulsoperator für Quadrupolphononen in zweitquantisierter Form	144
Aufgabe:	6.4	^{114}Cd als sphärischer Vibrator	151
Aufgabe:	6.5	Drehimpulsoperatoren im intrinsischen System	155
Aufgabe:	6.6	Drehimpuls 2 im asymmetrischen Rotatormodell	163
Aufgabe:	6.7	Die Zeitableitungen der $\alpha_{2\mu}$	167
Aufgabe:	6.8	Transformation des Quadrupoloperators	180
Aufgabe:	6.9	Ableitung der Gleichung für das Quadrupolmoment	180
Aufgabe:	6.10	^{238}U im Rotations–Vibrations–Modell	183
Aufgabe:	6.11	Ein Casimiroperator der Algebra $U(N)$	208
Aufgabe:	6.12	Weitere Beiträge zur Thomas–Reiche–Kuhn–Summenregel	221
Aufgabe:	7.1	Mittelwert der Tensorkraft	235
Aufgabe:	7.2	Matrizelemente der Variationsgleichung	251
Aufgabe:	7.3	Das Skyrme–Energiefunktional	262
Aufgabe:	7.4	Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators	269
Aufgabe:	7.5	Quadrupolmoment eines Kerns	275
Aufgabe:	7.6	Einteilchenenergien des deformierten Oszillators	285

Aufgabe: 7.7	Kreuzung zweier Energieniveaus	290
Aufgabe: 7.8	Paarkrafteffekt in einer $j = 7/2$ -Schale	311
Aufgabe: 8.1	Das Spektrum von ^{183}W im Modell der starken Kopplung	337
Aufgabe: 8.2	Tamm-Dancoff-Rechnung für ^{16}O	343
Aufgabe: 8.3	Eine Ableitung der Tamm-Dancoff-Näherung	345
Aufgabe: 8.4	Erweitertes schematisches Modell	349
Aufgabe: 9.1	Die Cranking-Formel für das BCS-Modell	383
Aufgabe: 9.2	Generatorkoordinatenmethode	390

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Kernstrukturphysik

Die in diesem Buch besprochenen Kernmodelle gehören zum Gebiet der *Kernstrukturtheorie*. Im heutigen Sprachgebrauch widmet sich die Kernstrukturphysik dem Studium der Eigenschaften von Kernen bei niedrigen Anregungsenergien, für die einzelne Energieniveaus aufgelöst werden können. Das bedeutet, daß typischerweise Quanteneffekte bestimmend sind und daß die Zustände des Kerns eine sehr komplizierte Struktur besitzen, die von den detaillierten Wechselbeziehungen der vielen beteiligten Nukleonen abhängt.

Im Gegensatz dazu wird bei höheren Energien und besonders bei Schwerionenreaktionen die Quantenmechanik weniger wichtig, und die Methoden der statistischen Mechanik nehmen stattdessen die herausragende Stellung ein. Die Theorien beschäftigen sich dann typischerweise mit den kollektiven Eigenschaften von Kernmaterie wie der Zustandsgleichung oder den Reibungskoeffizienten, oder sie basieren sogar auf rein klassischer Vielteilchenphysik wie die Kaskadenmodelle.

Natürlich kann man unmöglich genaue Energiegrenzen zwischen diesen Theorien angeben. Die hier vorgestellten Theorien jedoch finden typischerweise ihre Anwendung für Anregungsenergien bis zu 2–3 MeV. Gewöhnlich können nur die niedrigsten paar Energieniveaus gut durch ein theoretisches Modell beschrieben werden, und die Zahl der Niveaus nimmt oberhalb dieses Energiebereichs so rasch zu, daß ein sinnvoller Vergleich mit dem Experiment unmöglich wird (bei Kernen mit einer ungeraden Zahl von Neutronen oder Protonen oder beiden ist das sogar noch dramatischer — die meisten Kernmodelle bevorzugen gerade–gerade–Kerne mit ihren relativ einfachen Spektren). Auch sollte man sich vergegenwärtigen, daß in experimentellen Spektren nur eine relativ kleine Zahl von Zuständen bezüglich Spin und Isospin identifiziert werden können und daß für den echten Test eines Modells Übergänge, d. h. im wesentlichen Überlappintegrale zwischen Wellenfunktionen, benötigt werden, welche wiederum oft nicht einmal für die interessantesten Zustände bekannt sind.

Es ist also nicht überraschend, daß die in diesem Buch vorgestellten Modelle gewöhnlich eine relativ geringe Zahl von niedrigliegenden Zuständen und nur mit bescheidener Genauigkeit erklären, was aber immer noch einen bemerkenswerten Erfolg darstellt. Um das einschätzen zu können, sei daran erinnert, daß wir uns mit einem System von Teilchen beschäftigen, deren Zahl weder klein genug ist, um eine direkte Lösung zu erlauben, noch groß genug, um statistische Methoden genau genug werden zu lassen, und die über eine Wechselwirkung miteinander in Beziehung stehen, die immer noch

nicht in eine endgültige Form gebracht werden konnte. Es ist diese außergewöhnliche Schwierigkeit und die Freiheit, mit der Methoden und Konzepte aus vielen anderen Zweigen der Physik hier angewandt werden, was die Kernstrukturphysik so faszinierend macht und mit Leben erfüllt.

1.2 Die grundlegende Gleichung

Um den geeigneten theoretischen Startpunkt zu finden, müssen noch ein paar Grobabschätzungen der relevanten physikalischen Größen eingeführt werden. Zuerst sollen einige Zahlen aus der elementaren experimentellen Kernphysik in Erinnerung gerufen werden.

Die zur Zeit bekannten Elemente haben Kerne, bestehend aus $Z = 1, \dots, 111$, Protonen und $N = 0, \dots, 161$ Neutronen, was eine Gesamtzahl von A Nukleonen ergibt. Die Radien der Kerne folgen dem empirischen Gesetz

$$R(A) = r_0 A^{1/3} \quad (1.1)$$

mit $r_0 \approx 1.2$ fm. Kernradien reichen also bis etwa 7.5 fm. Die Formel beinhaltet auch, daß das Kernvolumen proportional zur Zahl der Teilchen im Kern ist, was die annähernde Inkompressibilität von Kernmaterie anzeigt (das wahre, mit Elektronenstreuung beobachtete Dichteprofil ist etwas komplizierter). Das am wenigsten gebundene Nukleon hat eine Bindungsenergie von der Ordnung 8 MeV und eine kinetische Energie nahe 40 MeV.

Diese Information reicht schon aus, um einige grobe Vorstellungen darüber zu bekommen, was das Wesentliche in den Theorien sein wird. Da ein Nukleon eine Masse von $mc^2 \approx 938$ MeV hat, ist die kinetische Energie im Vergleich ziemlich vernachlässigbar, so daß ein *nichtrelativistischer* Ansatz recht befriedigend zu sein verspricht, und diese Annahme wird in der überwältigenden Mehrheit von Kernstrukturmodellen gemacht. In jüngster Zeit gewannen jedoch relativistische Zugänge an Bedeutung — dieses Thema wird in Abschnitt 7.4 in Verbindung mit dem relativistischen Mean-Field-Modell aufgenommen, und es wird dort auch erklärt, warum relativistische Effekte trotz der oben angegebenen einfachen Abschätzung wichtig sein können.

Die Geschwindigkeit eines Nukleons mit einer kinetischen Energie von $T = 40$ MeV ist durch

$$v = \sqrt{\frac{2T}{m}} = c \sqrt{\frac{2T}{mc^2}} \approx 0.3c \quad (1.2)$$

gegeben und die zugehörige de-Broglie-Wellenlänge durch

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv} = \frac{2\pi(\hbar c)}{(mc^2)(v/c)} \approx 4.5 \text{ fm}. \quad (1.3)$$

Hier wurde die nützliche Konstante $\hbar c \approx 197.32 \text{ MeV fm}$ verwendet. Das Ergebnis zeigt, daß Quanteneffekte sicherlich nicht vernachlässigt werden können, da λ in keiner Weise klein im Vergleich zum Kernradius ist. Das verstärkt sich sogar noch bei tiefer gebundenen Nucleonen, die eine geringere kinetische Energie besitzen.

Berücksichtigt man diese Überlegungen, so sollte der Startpunkt für eine Theorie der Eigenzustände von Kernen eine stationäre Schrödingergleichung sein, die sehr allgemein durch

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (1.4)$$

gegeben ist. Der Rest dieses Buchs behandelt die Frage, was für \hat{H} zu schreiben ist und welche Freiheitsgrade in den Wellenfunktionen verwendet werden sollten.

1.3 Mikroskopische vs. kollektive Modelle

Die natürlichste Wahl der Freiheitsgrade besteht sicherlich in der Verwendung der nukleonischen, d. h. den A Sätzen von Positionen \mathbf{r}_i , Spins \mathbf{s}_i und Isospins $\boldsymbol{\tau}_i$. Die Wellenfunktion nimmt dann die allgemeine Gestalt

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1, \boldsymbol{\tau}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_2, \boldsymbol{\tau}_2, \dots, \mathbf{r}_A, \mathbf{s}_A, \boldsymbol{\tau}_A) \quad (1.5)$$

an, während man für den Hamiltonoperator den natürlichen Ausdruck

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^A -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v(i,j) \quad (1.6)$$

ausprobieren würde. Dies ist der grundsätzliche Startpunkt für *mikroskopische Modelle*, in denen die Freiheitsgrade jene der Teilchen sind, aus denen der Kern zusammengesetzt ist. Hier ist $v(i,j)$ die Nukleon–Nukleon–Wechselwirkung, die von allen Freiheitsgraden eines Paares von Nucleonen abhängen kann. Es ist klar, daß man selbst mit modernen Computern unmöglich die Vielteilchen–Schrödingergleichung für A größer als drei oder vier direkt lösen kann, so daß die Suche nach geeigneten Näherungen die vorrangigste Sorge bei diesem Typ von Modellen sein wird.

Es ist eine der wichtigsten Eigenarten der Theorie des Kerns, daß es für $v(i,k)$ keine Theorie a priori gibt. Statt dessen benutzt man verschiedene Parametrisierungen, die für unterschiedliche Zwecke gut sind — eine kann angemessen sein, um Nukleon–Nukleon–Streuung zu beschreiben und eine andere für Hartree–Fock–Rechnungen für schwere Kerne. Es besteht nicht einmal Klarheit darüber, wie wichtig Dreikörperkräfte sein könnten, die nicht in dem oben angegebenen Hamiltonoperator enthalten sind. Bis die Nukleon–Nukleon–Wechselwirkung aus einer tieferliegenden Theorie wie der Quantenchromodynamik abgeleitet sein wird, wird man mit dieser Situation leben müssen. Man beachte den Unterschied zur Lage in der Atomphysik, wo die fundamentale Theorie der Wechselwirkung — die QED — sehr gut bekannt