Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Günther Thun
Studiendirektor in Oldenburg
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Die in diesem Buch zitierten Internetseiten wurden vor der Veröffentlichung auf rechtswidrige Inhalte untersucht. Rechtswidrige Inhalte wurden nicht gefunden.
Stand: Juni 2017

Umschlag: Hintergrundbild Kirill Kedrinski - Fotolia.com
Bild Kasten Links: Mike Kiev - Fotolia.com
Bild Kasten Mitte: Andres Rodriguez - Fotolia.com.

* * * * *

1. Auflage 2017

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**0386-5**

Prozentsatz

Beispiel

Von den 30 000 Wahlberechtigten eines Wahlkreises beteiligten sich 18 600 an der Kommunalwahl.

Wie hoch war die Wahlbeteiligung in diesem Wahlkreis?

Lösung

Mit G = 30 000 , P = 18 600 erhält man aus $p\,\% = \frac{P}{G}$: $p\,\% = \frac{18600}{30000} = 0{,}62 = 62\,\%$

oder

mit dem **Dreisatz:** 30 000 Wahlberechtigte ≙ 100 %
18 600 Wahlberechtigte ≙ x %

$x = \frac{18600 \cdot 100}{30000} = 62$

Antwort: Die Wahlbeteiligung lag bei 62 %.

Prozentwert

Beispiel

Von den 18 600 abgegebenen Stimmen des Wahlkreises entfielen 35 % auf die Partei des Landrats. Wie viele Stimmen konnte die Partei auf sich vereinigen?

Lösung

Mit G = 18 600, p % = 35 % erhält man aus $p\,\% = \frac{P}{G}$:

$0{,}35 = \frac{P}{18600}$

$P = 18\,600 \cdot 35\,\% = 6\,510$

oder

mit dem **Dreisatz:** 100 % ≙ 18 600 Wahlberechtigte
35 % ≙ x Wahlberechtigte

$x = \frac{18600 \cdot 35}{100} = 6\,510$

Antwort: Die Partei erhielt 6 510 Stimmen.

Grundwert

Beispiel

Für den Landrat verliefen die Wahlen sehr erfolgreich. Er erhielt 39 525 Stimmen, das entsprach einem Anteil von 85 % der gültigen Stimmen. Wie viele Stimmen waren insgesamt gültig?

Lösung

Mit P = 39 525, p % = 85 % erhält man aus $p\,\% = \frac{P}{G}$:

$0{,}85 = \frac{39525}{G}$

$G = \frac{39525}{0{,}85} = 46\,500$

oder

mit dem **Dreisatz:** 85 % ≙ 39 525 gültige Stimmen
100 % ≙ x gültige Stimmen

$x = \frac{39525 \cdot 100}{85} = 46\,500$

Antwort: Es wurden 46 500 gültige Stimmen abgegeben.

Was man wissen sollte... über die Prozentrechnung

Prozentsatz

$$p\,\% = \frac{P}{G}$$

Prozentwert

$$P = G \cdot p\,\% = G \cdot \frac{p}{100}$$

Grundwert

$$G = \frac{P}{p\,\%} = \frac{P \cdot 100}{p}$$

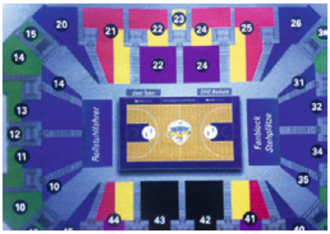
Aufgaben

1 Bei der Abschlussprüfung einer Fachoberschule gab es im vergangenen Schuljahr die folgenden Ergebnisse in den Mathematikklausuren:
In der Klasse FO 2a nahmen 24 Prüflinge teil, 7 ihrer Klausuren wurden mit mangelhaft oder ungenügend bewertet. In der Klasse FO 2b wurden von den 22 Prüflingen nur 6 Arbeiten mit diesen Noten bewertet. Welche Prüfungsgruppe erzielte eine geringere Durchfallquote?

2 Auf einem Schulsportfest wurden in den zwei elften Klassen a und b mit insgesamt 36 Schülerinnen und Schülern 8 Ehrenurkunden verteilt. In der Klasse a mit 17 Schülern waren 4 Schüler erfolgreich. Vergleichen Sie den sportlichen Erfolg der beiden Klassen.

3 Ein Verein der Basketball-Bundesliga bietet für verschiedene Sitzplatz-Kategorien ermäßigte Preise an. Vergleichen Sie die Ermäßigungen in € und in Prozent.

Kategorie	NORMAL	ERMÄSSIGT
PK 1 (gelb)	24,00 €	21,00 €
PK 2 (rot)	19,00 €	16,00 €
PK 3 (grün)	15,00 €	12,00 €



4 Ein Hausbesitzer erhöht die Monatsmiete für sein Appartement von 430 € auf 465 €. Um wie viel Prozent hat er den Mietpreis angehoben?

5 Ein Kunde stellt bei der Auslieferung eines neuen Fernsehers einen kleinen Kratzer am Gehäuse fest und verlangt daraufhin einen Preisnachlass auf den regulären Preis von 1499 €. Der Verkäufer bietet ihm nun das Gerät für 1400 € an.
Wie hoch ist der Preisnachlass in Prozent?

6 Anlässlich einer Rotstift-Aktion senkt die Damen-Boutique „Angelika" die Preise der Sommerkollektion (s. Abbildung).
Um wie viel Prozent wurden das Oberteil und die Jeans im Preis herabgesetzt?

7 Zum Abschluss der Wintersaison reduziert die Firma „Sport-point" die Ski-Bekleidung: Ein Skianorak, bisheriger Preis 129,00 €, wird auf 100 € reduziert, während der dazu passende Overall aus dieser Kollektion, bisheriger Preis 149 €, auf 125 € herabgesetzt wird.

a) Um wieviel Prozent wurden die beiden Artikel im Preis reduziert?

b) Ein Kunde kauft beide Artikel. Wie viel Prozent spart er auf den Gesamtpreis?

8 Die ARD hat ermittelt, dass mit 34,57 Mio. Zuschauern der bisher höchste Marktanteil an Zuschauern bei der Live-Übertragung des WM-Finales 2014 zwischen Argentinien und Deutschland erzielt wurde. Damit verfolgten 86,2 % der Fernsehzuschauer das Spiel. Wie viel Zuschauer saßen zu der Zeit insgesamt am Bildschirm und wie viel Zuschauer schauten etwas anderes (runden Sie auf volle 100 Zuschauer)?

9 Eine Autowerkstatt bietet einem Kunden zwei Winterreifen 225/55 R16 95 H Wintersport 4D zu einem Preis von 195,50 € zuzüglich 19 % MwSt an. Wie viel kostet ein Reifen einschließlich der Mehrwertsteuer (Bruttopreis)?

10 Eine Erhebung der Schülerzahlen an den öffentlichen berufsbildenden Schulen hat für die Fachoberschulen des Landes Niedersachsen folgende Zahlen ergeben:
2005: 13 028; 2010: 17 293; 2015: 18 686

a) Ermitteln Sie die prozentualen Veränderungen: 2005 zu 2010; 2010 zu 2015 und 2005 zu 2015.
b) Um wie viel Prozent ist die Schülerzahl im Jahre 2015 im Vergleich zu 2014 gesunken? Im Jahr 2014 waren 18 877 Schüler gemeldet.

11 Eine Elektrohandlung erhält von einem Großhändler ein Angebot über Elektroherde: Der Einzelpreis beträgt 450 €. Bei Abnahme von mindestens 10 Stück gewährt er 10 % Mengenrabatt. Bei Zahlung innerhalb von 8 Tagen werden 2 % Skonto gewährt.
Der Händler bestellt 10 Stück und zahlt die Rechnung unmittelbar nach Erhalt. Wie hoch lautet der Überweisungsbetrag? Welcher Einkaufspreis ergibt sich daraus pro Stück?

12 Die Besucherzahlen des Landesmuseums nahmen in diesem Jahr wegen des schlechten Wetters um 12 % zu, es wurden 3 893 Eintrittskarten mehr verkauft als im Vorjahr.
Wie hoch war die Besucherzahl im Vorjahr und wie hoch ist sie in diesem Jahr?

13 Ein Kaufmann hat eine Lieferantenrechnung nach Abzug von 2 % Skonto beglichen und dadurch 12,70 € eingespart. Über welchen Betrag lautete die Rechnung und wie hoch war der Überweisungsbetrag?

14 Die Kraftfahrzeugversicherung eines Pkw kostet bei jährlicher Zahlung 562,14 € und bei halbjährlicher Zahlung 323,41 € je Halbjahr. Um wie viel % ist der Beitrag bei halbjährlicher Zahlung teurer?

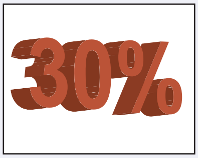
15 Gesellschafter Burmeister erhält laut Vertrag 14 % vom Reingewinn der Gesellschaft. Im abgelaufenen Geschäftsjahr standen ihm dadurch 3 976 € zu. Welchen Reingewinn konnte die Gesellschaft in dem Jahr verbuchen?

16 An einer OHG sind die Gesellschafter A, B und C mit folgenden Einlagen beteiligt. Gesellschafter A mit 35 % des Gesellschaftsvermögens, Gesellschafter B mit 42 % und Gesellschafter C mit 69 000 €.

a) Berechnen Sie das gesamte Gesellschaftsvermögen der OHG.
b) Im abgelaufenen Geschäftsjahr erzielte das Unternehmen einen Gewinn in Höhe von 60 000 €. Nach den vertraglichen Vereinbarungen erhalten die Gesellschafter zunächst eine Verzinsung von 4 % auf ihre Einlage. Der Restgewinn wird gleichmäßig auf die Gesellschafter („nach Köpfen") verteilt. Nehmen Sie die Gewinnverteilung vor.

1.2.3 Verminderter und vermehrter Grundwert

Beispiel 1



➲ Das Sportgeschäft Jakob senkt den Preis einer Skijacke um 30 %.
Der neue Preis beträgt 142,10 €.
Wie hoch war der ursprüngliche Preis?

Lösung

Die Preissenkung von 30 % bezieht sich auf den nicht bekannten ursprünglichen Preis. Dieser ursprüngliche Preis ist der Grundwert G, er entspricht 100 %. Der herabgesetzte Preis ist der Prozentwert P und gleichzeitig der **verminderte Grundwert.**

Prozentwert (**Verminderter Grundwert**): P = 142,10

Prozentsatz: p % = 100 % − 30 % = 70 %

Mit P = 142,10; p % = 70 % = 0,7 erhält man aus **p % =** $\mathbf{\frac{P}{G}}$: $0{,}70 = \frac{142{,}10}{G}$

$$G = \frac{142{,}10}{0{,}70} = 203$$

oder

mit dem **Dreisatz:** 70 % ≙ 142,10 €

verkürzte Form 100 % ≙ x € $x = \frac{142{,}10}{70} \cdot 100 = 203$

Antwort: Der ursprüngliche Preis betrug 203 €.

Ursrpünglicher Preis der Skijacke (G ≙ 100 %)	
Neuer Preis 142,10 € ≙ 70 %	Preissenkung 30 %

Grundwert G ≙ 100 %	
Verminderter Grundwert ≙ p % < 100 %	Preissenkung

Beispiel 2

➲ Der Verkaufspreis einer Lederjacke, regulärer Preis 900 €, wird im Rahmen der Werbewoche eines Textilgeschäftes um 20 % im Preis gesenkt. Wie hoch ist der Sonderpreis?

Lösung

Mit G = 900, p % = 100% − 20 % = 80 % = 0,80

erhält man aus p % = $\frac{P}{G}$: $0{,}80 = \frac{P}{900}$

$$P = 900 \cdot 0{,}80 = 720$$

oder

mit dem **Dreisatz:** 100 % ≙ 900 €

80 % ≙ x € $x = \frac{900 \cdot 80}{100} = 720$

Antwort: Der Sonderpreis der Jacke liegt bei 720 €.

Hinweis: Der Sonderpreis entspricht dem **verminderten Grundwert.**

2.1 Finanzwirtschaftliche Anwendungen der Zinsrechnung

2.1.1 Grundlagen und Grundbegriffe

Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung. Die drei Grundbegriffe Prozentwert, Grundwert und Prozentsatz ändern ihre Namen.

Bemerkung:

Prozentrechnung:	**Prozentwert P**	Grundwert G	Prozentsatz p %
Zinsrechnung:	**Zinsen Z**	Kapital K	Zinssatz p %

Formel für den Prozentwert: $P = G \cdot p\,\%$

Formel für die (jährlichen) Zinsen: $Z = K \cdot p\,\%$

Beispiel 1

Ein Auszubildender hat ein Sparguthaben von 2 300,00 €.
Wie viel Zinsen erhält er nach einem Jahr bei einem Zinssatz (Zinsfuß) von 1,5 %?

Lösung

Gegeben: $K = 2300$; Zinssatz: $p\,\% = 1{,}5\,\% = \frac{1{,}5}{100} = 0{,}015$

Gesucht: Zinsen

Mit der Formel: $Z = K \cdot p\,\%$ ergibt sich $Z = 2300 \cdot 0{,}015 = 34{,}50$

Er erhält 34,50 € Zinsen.

Beispiel 2

Alex bekommt am Jahresende für seine Spareinlage von 4250,00 € eine Gutschrift über 106,25 €.

a) Wie hoch ist der Zinssatz?

b) Alex möchte seine Spareinlage und die Zinsen für ein weiteres Jahr anlegen.
Wie hoch ist sein Kapital am Ende des folgenden Jahres?

Lösung

a) Gegeben: $K = 4250$; $Z = 106{,}25$

Gesucht: Zinssatz $p\,\%$

Mit der Formel $Z = K \cdot p\,\%$ ergibt sich $106{,}25 = 4250 \cdot p\,\%$

$$p\,\% = \frac{106{,}25}{4250} = 0{,}025 = 2{,}5\,\%$$

Der Zinssatz beträgt 2,5 %.

b) Gegeben: Kapital nach einem Jahr: $K_1 = 4250 + 106{,}25 = 4356{,}25$;
Zinssatz $p\,\% = 2{,}5\,\%$

Zinsen nach dem 2. Jahr: $Z_2 = K_1 \cdot p\,\% = 4356{,}25 \cdot 0{,}025 = 108{,}91$

Kapital nach 2 Jahren: $K_2 = K_1 + Z_2 = 4356{,}25 + 108{,}91 = 4465{,}16$

Nach 2 Jahren beträgt sein Kapital 4 465,16 €.

Beispiel 3

Ein Darlehen in Höhe von 5 000,00 € wird bei einem Zinssatz von 9 % für 100 Tage aufgenommen. Wie viel Zinsen sind für diesen Zeitraum zu zahlen?

Lösung

Zinsen für ein Jahr: $Z = K \cdot p\,\%$ $\quad Z = 5000 \cdot \frac{9}{100} = 450$

Für $t = 100$ (Tage) von 360 (Tagen) berechnet man den Bruchteil $\frac{100}{360}$ der Jahreszinsen.

Zinsen für 100 Tage: $\quad Z = K \cdot p\,\% \, \frac{t}{360}$

Zahlenwerte einsetzen: $\quad Z = 5000 \cdot \frac{9}{100} \cdot \frac{100}{360} = 125$

Es sind 125,00 € an Zinsen zu zahlen.

Damit man sich die Formel besser merken kann, formt man den Term um.

$Z = K \cdot p\,\% \cdot \frac{t}{360} = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$; **Prozentsatz:** $\mathbf{p\,\% = \frac{p}{100}}$; **t in Tagen**

Zinsformel für Tageszinsen

$$\mathbf{Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}}$$

Hinweis: Berechnung der Zinstage

Der 1. Tag des angegebenen Zeitraums wird nicht mitgerechnet, wohl aber der letzte.
Jeder Monat wird mit 30 Tagen gerechnet, dies gilt für alle Monate.
(1 Monat ≙ 30 Tage; 1 Jahr ≙ 360 Tage).

Beispiel 4

Ein Kaufmann hat vom 12. 3. bis 15. 9. einen Kredit aufgenommen. Die Bank berechnet dafür 488,00 € an Zinsen. Der vereinbarte Zinssatz beträgt 12 %.
Über welche Summe lautet der Kredit?

Lösung

Gegeben: $Z = 488{,}00$; Zinssatz $p\,\% = 12\,\%$

Berechnung der Zinstage vom 12. 3. bis 15. 9.: $\quad 18 + 5 \cdot 30 + 15 = 183$

$t = 183$ (Tage)

Hinweis: 12. 3. bis 30. 3. ≙ 18 Tage; 5 Monate ≙ 150 Tage; 1. 9. bis 15. 9. ≙ 15 Tage

Gesucht: Kapital K

In die Formel $\mathbf{Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}}$ Zahlenwerte einsetzen: $\quad 488 = \frac{K \cdot 12 \cdot 183}{100 \cdot 360}$

und nach K umstellen: $\quad K = \frac{488 \cdot 100 \cdot 360}{12 \cdot 183}$

$K = 8\,000$

Der Kredit lautet auf 8 000 €.

Beispiel 5

➲ Ein Sparbetrag von 3 000,00 € brachte in der Zeit vom 25. 1. bis 5. 7. insgesamt 20,00 € an Zinsen.
Zu welchem Zinssatz war der Sparbetrag angelegt?

Lösung

Gegeben: Z = 20; K = 3000;

Berechnung der Zinstage vom 25. 1. bis 5. 7.: $5 + 5 \cdot 30 + 5 = 160$

$t = 160$

Hinweis: 25. 1. bis 30. 1. ≙ 5 Tage; 5 Monate ≙ 150 Tage; 1. 7. bis 5. 7. ≙ 5 Tage

Gesucht: Zinssatz p %

In die Formel $\mathbf{Z = \dfrac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}}$

Zahlenwerte einsetzen: $20 = \dfrac{3000 \cdot p \cdot 160}{100 \cdot 360}$

und nach p umstellen: $p = \dfrac{20 \cdot 100 \cdot 360}{3000 \cdot 160}$

$p = 1{,}5$

DerZinssatz beträgt 1,5 %.

Beispiel 6

1,75 % **Tagesgeld** Zinsen

➲ Jemand hat am 16. Mai 2 000,00 € bei einer Bank zu 1,75 % auf ein Tagesgeldkonto eingezahlt.
Wie viel Tage muss dieses Kapital angelegt werden, wenn es einen Zinsbetrag von 14,00 € bringen soll?
Zu welchem Datum findet die Auszahlung statt?

Lösung

Gegeben: Z = 14; K = 2000 ; Zinssatz: p % = 1,75 %

Gesucht: Zeitraum t und Auszahlungsdatum

In die Formel $\mathbf{Z = \dfrac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}}$

Zahlenwerte einsetzen: $14 = \dfrac{2000 \cdot 1{,}75 \cdot t}{100 \cdot 360}$

$t = \dfrac{14 \cdot 100 \cdot 360}{2000 \cdot 1{,}75}$

$t = 144$

Das Kapital muss 144 Tage angelegt werden.

Berechnung des Auszahlungsdatums:

16. Mai bis 30. Mai: ≙ 14 Tage; 4 Monate ≙ 120 Tage; 1.10. bis 10.10. ≙ 10 Tage

Das Kapital wird mit Wertstellung 10.Oktober ausgezahlt.

Aufgaben

1 Berechnen Sie die fehlenden Werte.

	Kapital	Zinssatz	Zeit	Zinsen
a)	520,00 €	2,5 %	1.2. bis 17.04.	?
b)	1200,00 €	4,5 %	?	4,50 €
c)	540,00 €	?	6 Monate	29,70 €
d)	?	9	1,5 Jahre	27,00 €

2 Simone zahlt am 27. Dezember 800,00 € auf ein neu eingerichtetes Sparkonto ein, das mit 1,5 % verzinst wird. Auf welches Guthaben wächst das Konto bis zu ihrem Urlaub am 20. Juli des Folgejahres an?

3 Ein Privatmann zahlte für ein Darlehen, das er am 12. 6. bei seiner Bank aufgenommen und am 19. 12. zurückgezahlt hat, Zinsen in Höhe von 233,75 €. Der Zinssatz der Bank betrug 7,5 %. Wie hoch war das ausgeliehene Darlehen?

4 Ein Kaufmann hat bei einer Rechnung über 675,00 € das Zahlungsziel überschritten und überweist deshalb unter Berücksichtigung von 7 % Verzugszinsen am 27. Mai insgesamt 677,63 € an seinen Lieferanten.
Mit wie viel Tagen war er mit seiner Rechnung in Verzug?
An welchem Tag war die Rechnung fällig?

5 Ein Ingenieur zahlte für ein Darlehen in Höhe von 18 000,00 €, das vom 18. 5. bis 13. 10. ausgeliehen war, Zinsen in Höhe von 362,50 €.
Zu welchem Zinssatz war das Darlehen ausgeliehen?

6 Der Einzelhandelskaufmann Groß kommt mit einer Rechnung über 3 690,00 €, fällig am 13. 9., in Zahlungsverzug. Sein Lieferant belastet ihn daraufhin wegen Überschreitung des Zahlungsziels mit Verzugszinsen in Höhe von 17,43 € bei einem Zinssatz von 10 %.
An welchem Tag stellt der Lieferant die Abrechnung über die Verzugszinsen aus?

7 Ein privates Geldinstitut unterbreitet seinen Kunden folgendes Angebot: „Sie zahlen 10 000,00 € bei uns ein und wir zahlen nach 10 Monaten 10 208,33 € zurück“.
Lohnt sich dieses Angebot, wenn Sie bei Ihrer Bank einen Zins von 2 % für Ihre Spareinlage erhalten?

8 Ein Schüler hatte am 12. 3. einen Geldbetrag bei seiner Bank angelegt und erhielt dafür am Jahresende eine Zinsgutschrift in Höhe von 6,00 €. Der Zinssatz der Bank lag bei 1,5 %.
Welchen Betrag hatte der Schüler eingezahlt?

9 Eine Rechnung über 490,00 €, die am 20. Juni fällig war, wird erst am 11. Juli einschließlich Verzugszinsen und 2,50 € Mahngebühren mit 494,79 € zurückgezahlt.
Wie viel Verzugszinsen wurden berechnet (in € und %)?

3.2 Gemeinsame Punkte

Gemeinsame Punkte von Kurve und x-Achse

Beachten Sie

Bedingung für die **Nullstelle von f**: $f(x) = 0$
Die **Nullstelle** einer quadratischen Funktion zu berechnen, heißt, eine **quadratische Gleichung lösen.**

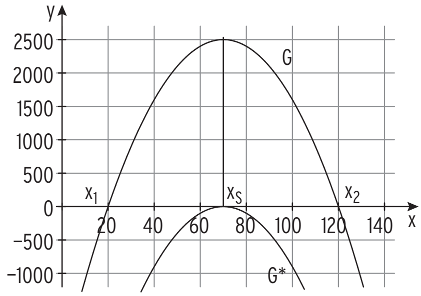
Beispiel 1

In einer Unternehmung lässt sich der **Gewinn** in € näherungsweise darstellen durch die Funktion G mit $G(x) = -x^2 + 140x - 2400$.
Die Variable x steht für die Stückzahl der produzierten und verkauften Ware.

a) Für welche Stückzahlen wird ein positiver Gewinn erzielt?
b) Wie groß ist der maximale Gewinn?
c) Die Fixkosten werden um 2500 € erhöht.
Beschreiben Sie die zugehörige Gewinnfunktion.

Lösung

a) Aus der grafischen Darstellung des Gewinnverlaufs lässt sich die **Gewinnzone** (Bereich für die Ausbringungsmenge x mit $G(x) \geq 0$) erkennen.



Um den Übergang von der Verlust- zur Gewinnzone **exakt** angeben zu können, müssen die **Schnittstellen von Gewinnkurve und x-Achse** berechnet werden.

Die Bedingung dafür ist $G(x) = 0$ $\qquad -x^2 + 140x - 2400 = 0$

quadratische Gleichung in Normalform: $\qquad x^2 - 140x + 2400 = 0$

Lösung mit der **pq-Formel:** $\qquad x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$p = -140;\ q = 2400$ $\qquad x_{1|2} = 70 \pm \sqrt{(-70)^2 - 2400} = 70 \pm 50$

Lösungen: $\qquad x_1 = 20;\ x_2 = 120$

Die Lösungen sind die **Gewinnschwelle** $(x_1 = 20)$ und die **Gewinngrenze** $(x_2 = 120)$.
x_1 und x_2 sind die **Nullstellen** der Gewinnfunktion.

b) Der maximale Gewinn wird im Scheitelpunkt S angenommen.
Für die x-Koordinate von S gilt: $\qquad x_S = -\frac{p}{2} = 70$ (vgl. pq-Formel)
Mit $G(70) = 2500$ erhält man den maximalen Gewinn $G_{max} = 2500$ €.

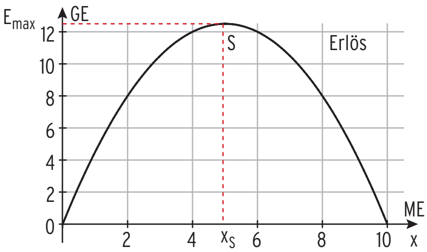
c) Die Gewinnkurve wird um 2500 nach unten verschoben.
Die verschobene Gewinnkurve berührt die x-Achse in $x = 70$ und wird beschrieben durch $G^*(x) = -x^2 + 140x - 4900$.

Beispiel 2

Ein Monopolist orientiert seine Preispolitik an der Preis-Absatz-Funktion p_N mit $p_N(x) = -\frac{1}{2}x + 5$, sein Erlös wird also durch E mit $E(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$ beschrieben. Bestimmen Sie den maximal ökonomisch sinnvollen Defintionsbereich und das Erlösmaximum.

Lösung

$E(x) = p_N(x) \cdot x$ ist ökonomisch sinnvoll für alle x, für die gilt: $E(x) \geq 0$.
Die Erlösparabel hat mit der x-Achse **genau zwei Punkte gemeinsam.**



Seite 477

Bedingung für die Nullstellen: $E(x) = 0$

$-\frac{1}{2}x^2 + 5x = 0$

Lösung durch **Ausklammern:** $-\frac{1}{2}x(x - 10) = 0$

Satz vom Nullprodukt liefert: $x_1 = 0;\ x_2 = 10$

Zwischen $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ ist der **Erlös positiv.**
Maximal ökonomisch sinnvoller Definitionsbereich
$D_{ök} = [0; 10]$

Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt ist null, wenn **mindestens** ein Faktor null ist:
$u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee v = 0$

Beachten Sie

x_1 und x_2 sind die **Nullstellen** der Funktion E.

Die **erlösmaximale** Ausbringungsmenge liegt genau zwischen den Nullstellen (Symmetrie).
Es gilt für die **x-Koordinate des Scheitelpunkts:**

$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = 5$

Erlösmaximum: $E(5) = 12{,}5$
Der maximale Erlös beträgt 12,5 GE.

Scheitelkoordinate

$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Wirtschaftliche Zusammenhänge

In der Marktform **Monopol** gibt es einen Anbieter, der **Preis** für das betrachtete Gut ist von der Menge abhängig, die am Markt abgesetzt werden soll.

$p_N(x) = a - bx;\ a,\ b > 0$	Preis in GE pro ME abhängig von der Menge x; p_N ist die **Preis-Absatz-Funktion des Monopolisten**
$E(x) = p_N(x) \cdot x$	**Erlös** (Umsatz) in Abhängigkeit von x; quadratische Funktion
$G(x) = E(x) - K(x)$	**Gewinn** = **Erlös** minus **Gesamtkosten**

Beispiel 3

Seite 476

Wo schneidet das Schaubild von f die x-Achse?

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ b) $f(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$ c) $f(x) = x^2 + 3x + 4$

Lösung

Bedingung für die Nullstelle: $f(x) = 0$

Lösung mit Formel

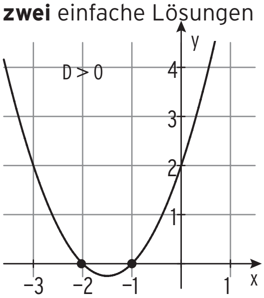
a) $x^2 + 3x + 2 = 0$

$x_{1|2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$

$D = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} > 0$

$x_1 = -2;\ x_2 = -1$

zwei einfache Lösungen



2 einfache Nullstellen

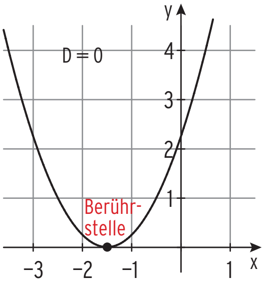
b) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$

$x_{1|2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}$

$D = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$

$x_{1|2} = -\frac{3}{2}$

eine doppelte Lösung



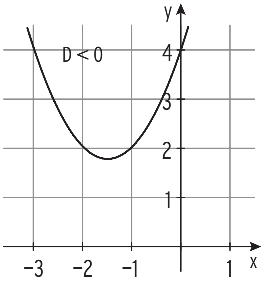
doppelte Nullstelle

c) $x^2 + 3x + 4 = 0$

$x_{1|2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4}$

$D = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 = -\frac{7}{4} < 0$

keine Lösung



keine Nullstellen

Beachten Sie

Lösung der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mithilfe der pq-Formel: $x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ heißt **Diskriminante.**

Die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung hängt von der

Diskriminante D ab.

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
zwei Lösungen	**eine (doppelte) Lösung**	**keine Lösung**

Weitere quadratische Gleichungen:

Lösung durch Ausklammern:

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = 3$

Lösung durch Wurzelziehen:

$-\frac{1}{2}x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$

$x_{1|2} = \pm\sqrt{2}$

Beachten Sie

$ax^2 + bx = 0$

Ausklammern von x: $x(ax + b) = 0$

Satz vom Nullprodukt:

$x = 0 \vee ax + b = 0$

$ax^2 + c = 0$

Umformen: $x^2 = -\frac{c}{a}$

Lösungen für $-\frac{c}{a} > 0$ durch Wurzelziehen.

Aufgaben

1 Lösen Sie die quadratische Gleichung ohne Hilfsmittel.

Seite 476

a) $x^2 + x - 12 = 0$ b) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0$ c) $3 - 2x + \frac{1}{3}x^2 = 0$

d) $x^2 + 2x + 6 = -2x + 1$ e) $-x^2 - 1{,}5x - 1{,}25 = 0$ f) $x^2 - 6x + 5 = 0$

g) $8x^2 + 3x - 1 = 0$ h) $x^2 = x + 3$ i) $1{,}5x - 0{,}5x^2 + 2 = 0$

2 Lösen Sie die quadratische Gleichung ohne Formel.

a) $-2x(x + 5) = 0$ b) $(3 - x)(x - 6) = 0$ c) $\frac{x}{5}(x + 1) = 0$

3 H ist der Graph der quadratischen Funktion f. Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte von H. Wie liegt H im Koordinatensystem? Fertigen Sie eine Skizze an.

a) $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - x - 6)$ b) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + x - \frac{5}{4}$ c) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x$

4 Bestimmen Sie einen Wert für a so, dass $x^2 - ax = 0$ die Lösung $x_1 = 4{,}5$ hat.

5 Ordnen Sie jeder Parabel einen Funktionsterm zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
$f(x) = -0{,}5(x - 1)^2$; $g(x) = 0{,}5x^2 - x$; $h(x) = (x + 1)(x - 2)$

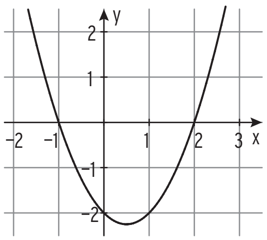


Abb. 1

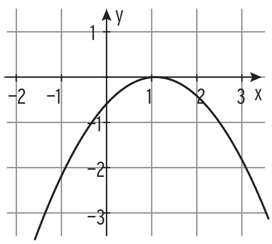


Abb. 2

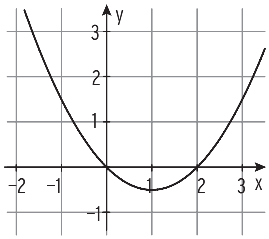


Abb. 3

6 Gegeben ist die Preis-Absatz-Funktion p_N mit $p_N(x) = -\frac{4}{5}x + 12$.
Bestimmen Sie den maximal ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich und das Erlösmaximum.

7 Für eine Ofenproduktion gilt die Gewinnfunktion G mit
$G(x) = -0{,}2x^2 + 12x - 100$; $x \geq 0$; x in ME, G(x) in €.

a) Bestimmen Sie die Gewinnschwelle, die Gewinngrenze und den maximalen Gewinn.

b) Die Fixkosten werden um 80 € erhöht. Ist die Produktion noch sinnvoll? Begründen Sie.

8 Die Nachfragefunktion p_N ist mit $p_N(x) = 20 - 0{,}025x^2$ gegeben.
Bestimmen Sie den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.

9 Die Gesamtkosten bei der Produktion von Fernsehgeräten werden beschrieben durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}5x + 37{,}5$; x in ME, K(x) in GE.
Der konstante Marktpreis beträgt 18 GE.

a) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion G. Auf welchem Bereich wird ein positiver Gewinn erzielt?

b) Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

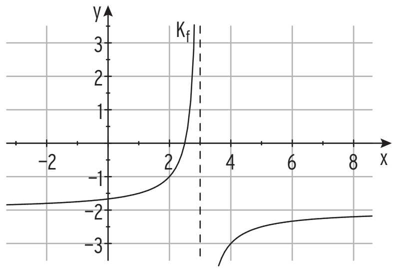
2.3 Schaubilder von gebrochenrationalen Funktionen

Beispiel 1

➲ Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{5-2x}{x-3}$; $x \in D$.
Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D der Funktion f.
Untersuchen Sie das Schaubild K_f von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und auf Asymptoten. Zeichnen Sie K_f.

Lösung

Schaubild



Definitionsmenge

Definitionslücke (Nullstelle des Nenners):
$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}\backslash\{3\}$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

- **mit der x-Achse**
  Bed.: $f(x) = 0$ $\quad \frac{5-2x}{x-3} = 0 \Leftrightarrow 5 - 2x = 0$
  Nullstelle von f (des Zählers): $\quad x = 2{,}5$
  $N(2{,}5 \mid 0)$

Bemerkung: $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = 0 \Leftrightarrow Z(x) = 0;\ x \in D$

Die **Nullstelle** $x_0 \in D_f$ **des Zählers (die Nullstelle von f)** führt zum **Schnittpunkt mit der x-Achse.**

- **mit der y-Achse**
  Bed.: $x = 0$ $\quad f(0) = -\frac{5}{3}$
  $S_y(0 \mid -\frac{5}{3})$

Asymptoten
Verhalten von f(x) für $x \to 3$ (Definitionslücke)

Für $x \to 3$ und $x > 3$ gilt: $\quad f(x) \to -\infty$
Für $x \to 3$ und $x < 3$ gilt: $\quad f(x) \to \infty$
„Vorzeichenwechsel“

Gleichung der senkrechten Asymptote: $\quad$ **x = 3**

Erläuterung:
$x_1 = 3$ ist eine **einfache Nullstelle des Nenners,**
d. h., der **Nenner wechselt das Vorzeichen (VZW).**
Für $x \to 3$ strebt der Zähler gegen die Zahl − 1. $x_1 = 3$ ist Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

Verhalten von f(x) für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ (Kurzschreibweise: für $|x| \to \infty$)

$$f(x) = \frac{5-2x}{x-3} = \frac{x(\frac{5}{x}-2)}{x(1-\frac{3}{x})} = \frac{\overbrace{\frac{5}{x}-2}^{\to\,-2}}{\underbrace{1-\frac{3}{x}}_{\to\,1}} \to \frac{-2}{1} = -2; \text{ d. h., } \lim_{|x|\to\infty} f(x) = -2$$

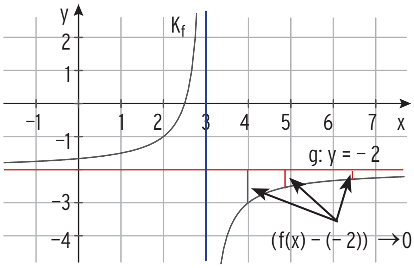
Das Schaubild K_f von f nähert sich für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ der Geraden g mit der Gleichung $y = -2$ immer mehr an, d. h.,

für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ gilt:

Die Differenz $f(x) - (-2)$ strebt gegen null: $\lim\limits_{|x|\to\infty} (f(x) - (-2)) = 0$.

Die **Näherungsgerade** mit $y = -2$ heißt **waagrechte Asymptote.**

Schaubild K_f von f:



Beachten Sie

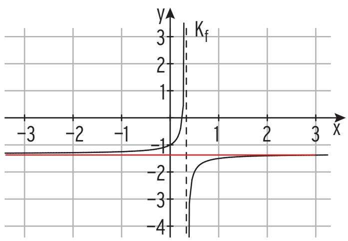
Sind **Nennergrad und Zählergrad gleich,** bestimmen die Faktoren vor der höchsten Potenz von x im Zähler und im Nenner die Gleichung der waagrechten Asymptote.
Ist der **Nennergrad größer als der Zählergrad,** dann ist die x-Achse waagrechte Asymptote.

Beispiele:

1) f mit $f(x) = \frac{1-4x}{3x-1}$

Nennergrad = Zählergrad = 1

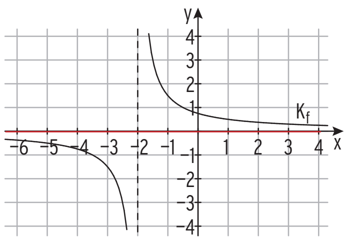
Das Schaubild von f hat eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = -\frac{4}{3}$.



2) f mit $f(x) = \frac{3}{2x+4}$

Nennergrad > Zählergrad

Das Schaubild von f hat die x-Achse als waagrechte Asymptote.



Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}$; $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Untersuchen Sie das Schaubild K_f von f auf Asymptoten. Skizzieren Sie K_f.

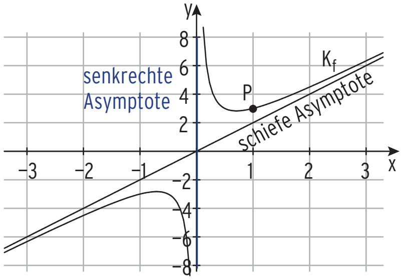
Lösung

Asymptoten

Senkrechte Asymptote

Die Definitionslücke $x_1 = 0$ ist einfache Nullstelle des Nenners und keine des Zählers, also Polstelle mit VZW.

Gleichung der senkrechten Asymptote: $x = 0$



Asymptote für $|x| \to \infty$

$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x} = 2x + \frac{1}{x}$

Streben die x-Werte gegen ∞ bzw. gegen $-\infty$, spielt der Summand $\frac{1}{x}$ eine immer geringere Rolle, d. h., der Summand 2x bestimmt immer mehr die Größe der Funktionswerte; die Funktionswerte f(x) unterscheiden sich immer weniger von 2x. K_f nähert sich immer mehr der Geraden g mit $y = 2x$ an.

Für $x \to \pm\infty$ gilt: $f(x) - 2x = \frac{1}{x} \to 0$

Die Gerade g mit der Gleichung $y = 2x$ ist **schiefe Asymptote.**

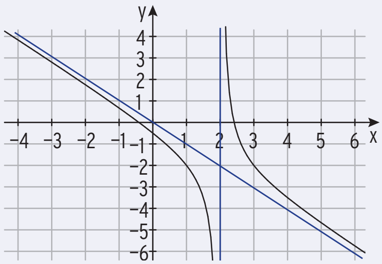
Hinweis: Zum Skizzieren des Graphen bestimmt man einen Kurvenpunkt, z.B. P(1 | 3).

Beachten Sie

Ist der **Zählergrad um 1 größer als der Nennergrad,** hat K_f eine **schiefe Asymptote.**

Beispiel 3

Das Schaubild gehört zu einer Funktion vom Typ $f(x) = ax + \frac{1}{x - b}$.
Bestimmen Sie a und b.



Lösung

$x_1 = 2$ ist eine Polstelle.

Nenner: $x - 2$ $\quad$ $b = 2$

Schiefe Asymptote: $y = -x$

Vergleich mit $f(x) = ax + \frac{1}{x - b}$ ergibt: $\quad$ $a = -1$

3.1.3 Multiplikation von Matrizen

Beispiel

Herbert kauft zum Schuljahresbeginn Schreibwaren ein.
Er führt einen Preisvergleich zwischen der Juniorenfirma und einem Schreibwarenladen durch.

Juniorenfirma

Menge	Stückpreis (in €)	Preis (in €)
4 Schreibblöcke	1,10	$4 \cdot 1{,}10 = 4{,}40$
3 Kugelschreiber	0,60	$3 \cdot 0{,}60 = 1{,}80$
5 Bleistifte	0,40	$5 \cdot 0{,}40 = 2{,}00$
Gesamtpreis:		8,20

Schreibwarenladen

Menge	Stückpreis (in €)	Preis (in €)
4 Schreibblöcke	1,20	$4 \cdot 1{,}20 = 4{,}80$
3 Kugelschreiber	0,50	$3 \cdot 0{,}50 = 1{,}50$
5 Bleistifte	0,45	$5 \cdot 0{,}45 = 2{,}25$
Gesamtpreis:		8,55

Den Gesamtpreis kann man mit dem **Schema von Falk** berechnen.

Juniorenfirma

Zeilenvektor $\vec{a}$ mal Spaltenvektor $\vec{b}$ ergibt eine Zahl (Skalar).

$$\begin{array}{c|l} & \begin{pmatrix} 1{,}10 \\ 0{,}60 \\ 0{,}40 \end{pmatrix} \text{ Stückpreisvektor} \\ \hline (4 \quad 3 \quad 5) & 4 \cdot 1{,}10 + 3 \cdot 0{,}60 + 5 \cdot 0{,}40 \quad = \mathbf{8{,}20} \end{array}$$

Mengenvektor **Gesamtpreis**

$$\begin{array}{c|l} & \vec{b} \\ \hline \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} = \text{Zahl} \end{array}$$

Beachten Sie

Das Produkt aus einem **Zeilenvektor** und einem **Spaltenvektor** heißt **Skalarprodukt**.
Das Skalarprodukt ist **eine Zahl.**

Juniorenfirma/Schreibwarenladen

Zeilenvektor $\vec{a}$ mal Matrix B ergibt einen Zeilenvektor.

$$\begin{array}{c|l} & \begin{pmatrix} 1{,}10 & 1{,}20 \\ 0{,}60 & 0{,}50 \\ 0{,}40 & 0{,}45 \end{pmatrix} \text{ Stückpreisvektor} \\ \hline (4 \quad 3 \quad 5) & (8{,}20 \quad 8{,}55) \end{array}$$

Mengenvektor **Gesamtpreisvektor**

$$\begin{array}{c|l} & B \\ \hline \vec{a} & \vec{a} \cdot B \quad \text{Zeilenvektor} \end{array}$$

Karl möchte die gleichen Artikel einkaufen wie Herbert, nur braucht er andere Stückzahlen: Mengenvektor $\vec{a} = (7 \;\; 5 \;\; 2)$.
Er führt auch einen Preisvergleich zwischen der Juniorenfirma und dem Schreibwarenladen durch. Der Gesamtpreis, den Herbert und Karl bezahlen müssten, kann wieder mit dem **Falk'schen Schema** berechnet werden.

$$
\begin{array}{ll|ll}
 & & \text{Jufi} & \text{Laden} \\
 & & \multicolumn{2}{l}{\begin{pmatrix} 1{,}10 & 1{,}20 \\ 0{,}60 & 0{,}50 \\ 0{,}40 & 0{,}45 \end{pmatrix} \text{ Stückpreismatrix}} \\
\hline
\text{Herbert:} & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$} & \multicolumn{2}{l}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 8{,}20 & 8{,}55 \\ 11{,}50 & 11{,}80 \end{pmatrix}$}} \\
\text{Karl:} & & & \\
 & \text{Mengenmatrix} & \multicolumn{2}{l}{\textbf{Gesamtpreismatrix}}
\end{array}
$$

Matrix A mal Matrix B ergibt eine Matrix:

$$
\begin{array}{c|l}
 & B \\
\hline
A & A \cdot B \;\; \text{Matrix}
\end{array}
$$

Z. B.: $7 \cdot 1{,}20 + 5 \cdot 0{,}50 + 2 \cdot 0{,}45 = 11{,}80$

Definition der Matrizenmultiplikation

Das Produkt zweier Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{rs})$ wird nach folgendem Schema berechnet.

$$
\begin{array}{c|c}
 & B \\
\hline
A & A \cdot B
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\ell} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2\ell} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n\ell} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = B \\
\hline
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1\ell} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2\ell} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \boxed{c_{k\ell}} & & \vdots \\ & & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{m\ell} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} = A \cdot B
\end{array}
$$

Berechnung des Elementes $c_{k\ell}$: $c_{k\ell} = a_{k1} \cdot b_{1\ell} + a_{k2} \cdot b_{2\ell} + \dots + a_{kn} \cdot b_{n\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot b_{j\ell}$

Hinweis: $A \cdot B$ kann nur berechnet werden, wenn die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt. $A_{(m;\,n)} \cdot B_{(n;\,p)} = C_{(m;\,p)}$.
Beispiel: $A_{(2;\,3)} \cdot B_{(3;\,4)} = C_{(2;\,4)}$

Beispiel 1

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie $A \cdot B$ und $A \cdot A$.

Lösung

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Schema von Falk

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
 & \mathbf{B} \\
\hline
\mathbf{A} & \mathbf{A \cdot B}
\end{array}
$$

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

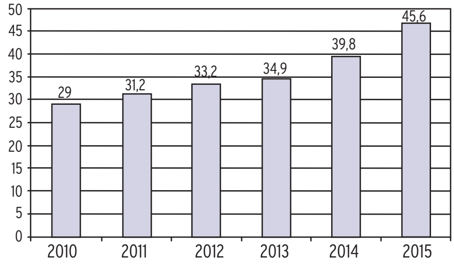
$A \cdot A = A^2$ Matrixpotenz

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
 & \mathbf{A} \\
\hline
\mathbf{A} & \mathbf{A \cdot A = A^2}
\end{array}
$$

4 Das Säulendiagramm zeigt den Schuldenstand eines Staates in Milliarden €.

a) Um wie viel % sind die Schulden im Laufe der letzten 6 Jahre angewachsen?

b) Zeichnen Sie ein Säulendiagramm, das den jährlichen Schuldenzuwachs beschreibt.
Welche Aussagen lassen sich machen?



5 Die Tabelle zeigt die Defizitquote der BRD im Zeitraum 2001 bis 2011 in %.

Jahr	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Quote	− 3,1	− 3,8	− 4,2	− 3,8	− 3,3	− 1,6	+ 0,2	− 0,1	− 3,1	− 4,1	− 0,8

a) Recherchieren Sie die Quote für 2012 und für das Jahr 2000.

b) Interpretieren Sie die Daten. In welchen Jahren wird die Vorgabe der EU eingehalten?

c) Nennen Sie Gründe für die starken Schwankungen.

6 Zur Wahl für den Niedersächsischen Landtag am 20. Januar 2013 bewarben sich 27 Parteien. Das Diagramm zeigt die Stimmenanteile der im Landtag vertretenen Parteien in %.

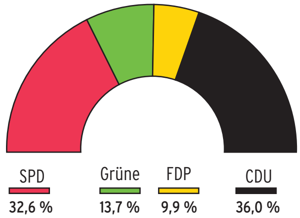
a) Die Addition der Stimmenanteile ergibt keine 100 %. Warum?

b) Der 2013 gewählte Landtag umfasst insgesamt 137 Abgeordnete.
Wie viele Sitze bekommen die Grünen nach ihrem Stimmenanteil? Stellen Sie die Sitzverteilung in einem Säulendiagramm dar.

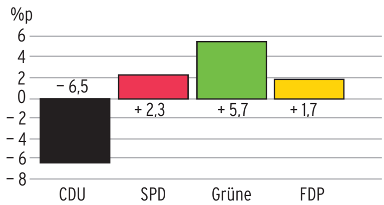
c) Wie groß waren die Stimmenanteile der Parteien bei der vorherigen Landtagswahl?

d) Nehmen Sie Stellung zu der Aussage:
Die SPD hat deutlicher zugenommen als die FDP.

Stimmenanteile und Sitzverteilung der Parteien der Wahl in Niedersachsen 2013



Gewinne und Verluste im Vergleich zu 2008



7 Das Autohaus Sätz hat 4 Niederlassungen, die eigenverantwortlich handeln.
Die Umsatzzahlen (in Mio. €) des Jahres 2016 werden für den Jahresabschluss aufgelistet.

Niederlassung	Köln	Neuss	Bottrop	Unna
Umsatz	22,7	14,6	6,3	5,4

a) Stellen Sie übersichtlich dar, welchen Anteil die Niederlassungen am Gesamtumsatz haben.

b) Welcher Anteil des Umsatzes wird insgesamt in den Filialen Köln und Neuss erzielt?

4.1.2 Deutung und Bewertung von Daten

Arithmetisches Mittel

In diesem Kapitel sollen zu einer Beobachtungsreihe charakteristische Größen bestimmt werden, die Aussagen über die Lage der Beobachtungswerte zulassen. Das bekannteste Lagemaß ist das arithmetische Mittel.

Beispiel 1

Die Umsatzzahlen der Fink-AG je Quartal des Jahres 2016 sind gegeben durch

	I	II	III	IV
Umsatz in Mio. € (x_i)	24,8	14,5	9,8	12,5

a) Berechnen Sie den Mittelwert für den Quartalsumsatz.
b) In den ersten 3 Monaten werden 40 % des Umsatzes erzielt. Nehmen Sie Stellung.

Lösung

a) **Durchschnittlicher Umsatz** je Quartal (Mittelwert):

$$\overline{x} = \frac{24{,}8 + 14{,}5 + 9{,}8 + 12{,}5}{4} = \frac{61{,}6}{4} = 15{,}4$$

In einem Quartal werden durchschnittlich 15,4 Mio. € Umsatz erzielt.
Bezeichnet man den Umsatz des Quartals I als Beobachtungswert x_1, den des Quartals II mit x_2,... , so erhält man den Mittelwert $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$.
Hinweis: Der Mittelwert 15,4 bedeutet: Hätte jedes Quartal einen Umsatz von 15,4 Mio. €, so ergäbe die Summe aller Umsätze 61,6 Mio. €.

b) Anteil des Umsatzes von Quartal I

am Gesamtumsatz: $\frac{\text{Umsatz in Quartal I}}{\text{Gesamtumsatz}} = \frac{24{,}8}{61{,}6} = 0{,}4026$

(Relative Häufigkeit)

In den ersten 3 Monaten werden 40,26 % des Umsatzes erzielt. Die Aussage stimmt.

Berechnung des (arithmetischen) Mittelwertes $\overline{x}$ aus den Beobachtungswerten x_i

Mittelwert $\overline{x} = \frac{\text{Summe aller Beobachtungswerte } x_i}{\text{Anzahl n der Beobachtungswerte } x_i} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$

Beispiele für Mittelwerte

Pro-Kopf-Verbrauch von Wasser:	135 Liter pro Tag
Durchschnittseinkommen aller Arbeitnehmer:	28 500 € pro Jahr
Durchschnittlicher Zigarettenverbrauch:	24,2 Zigaretten pro Tag
Mittlerer Verkaufspreis eines Fahrrads:	486,50 €
Mittlerer Absatz eines Autohauses:	12,5 Pkw pro Monat

Beispiel 2

Ein Weingut bietet vier Sorten Weine aus verschiedenen Lagen an.
Die nachfolgende Liste gibt die verkauften Mengen für einen Jahrgang an.

Sorte	A	B	C	D
Verkaufspreis pro Flasche in € (x_i)	5	7	8	12
Anzahl der verkauften Flaschen (n_i)	150	600	250	300

Berechnen Sie den durchschnittlichen Verkaufspreis pro Flasche.

Lösung

Anzahl der verkauften Flaschen: $n = 150 + 600 + 250 + 300 = 1300$

Erlös in € z. B. für Sorte A: $5 \cdot 150$

Erlös pro Flasche $= \frac{\text{Gesamteinnahmen}}{1300}$: $\frac{5 \cdot 150 + 7 \cdot 600 + 8 \cdot 250 + 12 \cdot 300}{1300} = \frac{10550}{1300} \approx 8{,}12$

$\bar{x} \approx 8{,}12$

Der durchschnittliche Verkaufspreis pro Flasche beträgt 8,12 €.

Hinweis: Mit den Beobachtungswerten x_1, x_2, x_3 und x_4, den absoluten Häufigkeiten n_1, n_2, n_3 und n_4 und dem Stichprobenumfang n erhält man $\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + x_4 \cdot n_4}{n}$

Mit den relativen Häufigkeiten h_1, h_2, h_3, h_4 ergibt sich:

$\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + x_3 \cdot h_3 + x_4 \cdot h_4$.

Berechnung des arithmetischen Mittels $\bar{x}$ aus einer Häufigkeitstabelle

für **k Ausprägungen**: $\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \ldots + x_k n_k}{n}$

$\bar{x} = x_1 h_1 + x_2 h_2 + x_3 h_3 + \ldots + x_k h_k$ mit $h_i = \frac{n_i}{n}$

Hierbei müssen die Häufigkeiten n_i aller k Merkmalsausprägungen x_i bekannt sein.
n ist die Summe der Häufigkeiten n_i.

Aufgaben

1 Berechnen Sie das arithmetische Mittel folgender Daten:

a) 15,2; 16,1; 17,3; 15,7; 14,8; 17,0; 16,8; 15,1

b)

x_i	52	55	58	60	65
n_i	3	4	5	3	1

c)

x_i	0	1	2	3
h_i	0,25	0,2	0,15	0,4

d)

x_i	1100	1300	1500
h_i	0,54	0,31	?

2 Im Jahre 2016 werden 4,2 Mio. € in die Fabrik investiert.
Die Investitionen sollen die nächsten 3 Jahre jeweils um 8 % gesteigert werden.
Berechnen Sie die mittlere Investitionssumme für den 4-Jahreszeitraum.

4.2.7 Binomialverteilung

Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Ketten

Im Folgenden werden Zufallsexperimente betrachtet, die nur **zwei Ergebnisse** haben.
Die beiden Ergebnisse werden häufig „Treffer“ oder „Erfolg“ (E) und „Niete“ oder „Fehlschlag“ ($\overline{E}$) genannt.
Ein solches Experiment wird als **Bernoulli-Experiment** bezeichnet.

Beispiele für **Bernoulli-Experimente**

- Münzwurf: Wappen (E); Zahl ($\overline{E}$)
- Materialprüfung: defekt (E); nicht defekt ($\overline{E}$)
- Qualitätsprüfung: maßhaltig (E); nicht maßhaltig ($\overline{E}$)
- Tombola: Gewinn (E); Niete ($\overline{E}$)

Bernoulli, Jakob, 1655 bis 1705

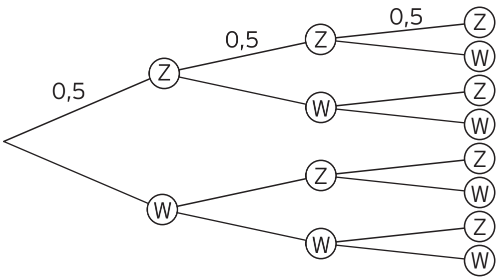
Definition

Ein Zufallsexperiment, bei dem nur zwei Ergebnisse (E und $\overline{E}$) betrachtet werden, heißt **Bernoulli-Experiment**.

Eine Münze wird dreimal hintereinander geworfen. Jeder Wurf ist ein Bernoulli-Experiment mit den Ergebnissen Wappen (W) oder Zahl (Z). Die einzelnen **Würfe** (Durchführungen des Experiments) beeinflussen sich nicht gegenseitig, sie sind voneinander unabhängig, d. h., die Trefferwahrscheinlichkeit ändert sich nicht.
Das dreimalige Werfen wird als ein Zufallsexperiment aufgefasst, man spricht in diesem Fall von einer **Bernoulli-Kette der Länge 3**.

Baumdiagramm

Ein Ergebnis lässt sich darstellen als Tripel, z. B. (WWZ).



Definition

Ein Zufallsexperiment, das aus n unabhängigen Durchführungen **eines Bernoulli-Experiments** besteht, heißt **Bernoulli-Kette** der Länge n.

Bemerkung: Ziehungen **ohne Zurücklegen** bilden **keine Bernoulli-Kette**, da sich die Wahrscheinlichkeit nach jedem Zug ändert.

Beispiel

➲ Ein Unternehmen produziert Ventile. 4 % der Ventile sind defekt. Aus der laufenden Produktion werden 4 Ventile entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 defekte Ventile entnommen werden.

Lösung

X: Anzahl der defekten Ventile; d: gezogenes Ventil ist defekt; $\bar{d}$: Ventil ist nicht defekt
Nach jeder Ziehung bleibt die Wahrscheinlichkeit für ein defektes Ventil erhalten.
Die Ziehung entspricht einer Ziehung **mit Zurücklegen**.
Es liegt eine Bernoulli-Kette der Länge 4 vor.
Wahrscheinlichkeit für z. B. $dd\bar{d}\bar{d}$: $P = 0{,}04^2 \cdot 0{,}96^2$
Die 2 defekten Ventile können auf 6 verschiedene Arten platziert werden:
$dd\bar{d}\bar{d}$; $d\bar{d}d\bar{d}$; $\bar{d}\bar{d}dd$; $dd\bar{d}\bar{d}$; $\bar{d}d\bar{d}d$; $\bar{d}dd\bar{d}$; $d\bar{d}\bar{d}d$
$P(X = 2) = 6 \cdot 0{,}04^2 \cdot 0{,}96^2 \approx 0{,}0088$

Mithilfe der Kombinatorik: Die Anzahl der Möglichkeiten, genau 2 defekte Ventile aus 4 Ventilen zu entnehmen, berechnet sich durch $\frac{4 \cdot 3}{2}$.
Schreibweise: $\frac{4 \cdot 3}{2} = \binom{4}{2}$ gelesen: 4 über 2 **(Binomialkoeffizient)**

10C3	
	120

Weitere Beispiele für Binomialkoeffizienten

Anzahl der Möglichkeiten, 2 defekte aus 8 Ventilen zu ziehen: $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

3 defekte aus 10 Ventilen zu ziehen: $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$

Allgemein: k defekte aus n (Ventilen): $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$ **(Binomialkoeffizient)**

Aufgaben

1 Überprüfen Sie, ob es sich bei den genannten Zufallsexperimenten um ein Bernoulli-Experiment handelt. Sollte dies zutreffen, bestimmen Sie die Parameter n und p.

a) Ein idealer Würfel wird viermal geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Fünfen.

b) In einer Urne liegen vier rote, drei schwarze und eine gelbe Kugel. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. X beschreibt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln.

c) Zu einer Ausfahrt in die Berge mit historischen Pkw treffen sich sieben Oldtimerfreunde. Ein Oldtimer fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}2$ aus.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der ausgefallenen Oldtimer auf der Tour.

d) Ein Glücksrad mit 3 gleichgroßen Feldern in den Farben rot, grün und blau wird sechsmal gedreht. X beschreibt, wie oft der Zeiger auf rot stehen bleibt.

e) Der laufenden Produktion werden 25 Schrauben entnommen. X ist die Anzahl der defekten Schrauben. Aus Erfahrung weiß man, dass 2 % der Schrauben defekt sind.

2 Berechnen Sie ohne Hilfsmittel: $\binom{10}{1}$; $\binom{4}{2}$; $\binom{7}{3}$; $\binom{14}{13}$

3 Schreiben Sie ausführlich, wie $\binom{12}{3}$ und $\binom{20}{5}$ berechnet werden.

Die Bernoulli-Formel

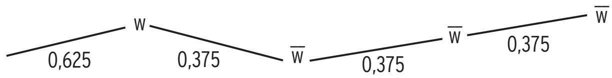
Beispiel 1

➲ In einer Urne befinden sich 5 weiße und 3 Kugeln anderer Farbe. Es wird viermal eine Kugel **mit Zurücklegen** gezogen und jedesmal die Farbe notiert.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln an.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Lösung

Die Ziehungen sind unabhängig. Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge 4.

Die Wahrscheinlichkeit für „Weiße Kugel" (Treffer) beträgt jedesmal $p = 0{,}625$ und für **„Nichtweiße Kugel"** $q = 1 - p = 0{,}375$.
Die Wahrscheinlichkeit für z. B. $(w\,\overline{w}\,\overline{w}\,\overline{w})$ beträgt $P = 0{,}625^1 \cdot 0{,}375^3$.



Das Ergebnis $(\overline{w}\,w\,\overline{w}\,\overline{w})$ hat dieselbe Wahrscheinlichkeit.
Die weiße Kugel kann an 4 verschiedenen Stellen notiert werden. Die Wahrscheinlichkeit **für eine weiße Kugel** beträgt somit: $P(X = 1) = 4 \cdot 0{,}625^1 \cdot 0{,}375^3 \approx 0{,}132$

Wahrscheinlichkeit für zwei weiße Kugeln
Die Wahrscheinlichkeit für z. B. $(w\,w\,\overline{w}\,\overline{w})$ beträgt $P = 0{,}625^2 \cdot 0{,}375^2$.
Das Ergebnis $(w\,\overline{w}\,w\,\overline{w})$ hat dieselbe Wahrscheinlichkeit.
Mit zwei weißen Kugeln gibt es $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6 = \binom{4}{2}$ Ergebnisse.
(4 über 2; **Binomialkoeffizient)**
Die Wahrscheinlichkeit **für zwei weiße Kugeln** beträgt somit
$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}625^2 \cdot 0{,}375^2 \approx 0{,}330$.

Weitere Wahrscheinlichkeiten mithilfe des Binomialkoeffizienten:

$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}625^3 \cdot 0{,}375^1 = 4 \cdot 0{,}625^3 \cdot 0{,}375^1 \approx 0{,}366$

$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot 0{,}625^4 \cdot 0{,}375^0 = 1 \cdot 0{,}625^4 \cdot 0{,}375^0 \approx 0{,}152$

$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0{,}625^0 \cdot 0{,}375^4 = 1 \cdot 0{,}625^0 \cdot 0{,}375^4 \approx 0{,}020$ mit $\binom{4}{0} = 1$ (Festlegung)

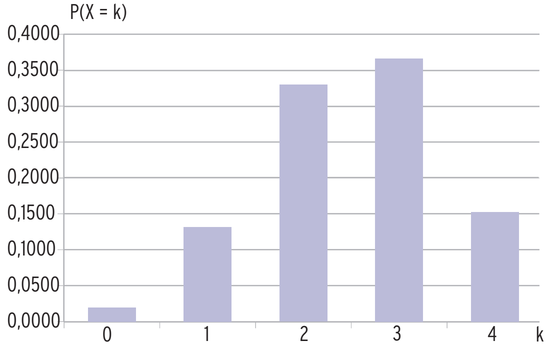
Beachten Sie

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$ $\binom{n}{0} = 1$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

k	0	1	2	3	4
P (X = k)	$\binom{4}{0} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^4$ ≈ 0,020	$\binom{4}{1} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3$ ≈ 0,132	$\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2$ ≈ 0,330	$\binom{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^1$ ≈ 0,366	$\binom{4}{4} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^0$ ≈ 0,152

Grafische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung:
x-Achse: Anzahl der Treffer k
y-Achse: Wahrscheinlichkeit
P (X = k)



Formel von Bernoulli

Die **Wahrscheinlichkeit,** dass bei n Durchführungen eines Bernoulli-Experiments genau k-mal das Ereignis E (der Treffer E mit $P(E) = p$) eintritt, ist gegeben durch:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Treffer.

Schreibweise: $P(X = 3) = B_{4;\,\frac{5}{8}}(3)$

Anzahl der Ziehungen   Wahrscheinlichkeit für Treffer   Anzahl der Treffer

Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Trefferwahrscheinlichkeit p bei 4 Ziehungen

k	0	1	2	3	4
P (X = k)	$\binom{4}{0} \cdot p^0 (1 - p)^4$	$\binom{4}{1} \cdot p^1 (1 - p)^3$	$\binom{4}{2} \cdot p^2 (1 - p)^2$	$\binom{4}{3} \cdot p^3 (1 - p)^1$	$\binom{4}{4} \cdot p^4 (1 - p)^0$

Festlegung

Gegeben ist eine **Bernoulli-Kette** der Länge n für die Trefferwahrscheinlichkeit p.
Ist X die Anzahl der Treffer, so heißt die **Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X Binomialverteilung.**
Diese Verteilung kann in Tabellenform angegeben werden.

Bemerkung: Für $P(X = k)$ schreibt man auch $\mathbf{B_{n;\,p}(k)}$.
Die Zufallsvariable X ist **binomialverteilt. X ist $\mathbf{B_{n;\,p}}$-verteilt.**

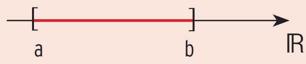
VI Grundwissen

1 Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen

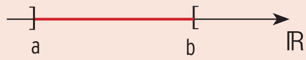
Beispiele

$[0; 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$	alle reellen Zahlen von 0 bis 5, einschließlich 0 und 5
$]-2; 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 2\}$	alle reellen Zahlen zwischen −2 bis 2, ausschließlich −2 und einschließlich 2
$]1; 6[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 6\}$	alle reellen Zahlen größer als 1 und kleiner als 6
$[1; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$	alle reellen Zahlen größer oder gleich 1

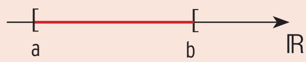
Geschlossenes Intervall: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



Offenes Intervall: $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



Halboffenes Intervall: $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$



Aufgaben

1 Schreiben Sie als Intervall.

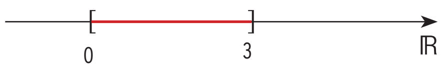
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$ **b)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2{,}5\}$ **c)** $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$ **d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 7\}$

2 Stellen Sie das Intervall in Mengenschreibweise dar.

a) $[-2; 3]$ **b)** $]-5; 1]$ **c)** $]-\infty; 3]$ **d)** $]1; 10[$

3 Beschreiben Sie die markierten Mengen.

a)



b)

c)

d)