Carl Friedrich Gauss · Untersuchungen über höhere Arithmetik (Disquisitiones Arithmeticae)

Faksimile-Reprint der Auflage von 1889,
herausgegeben von H. Maser

Mit freundlicher Genehmigung des
Göttinger Digitalisierungszentrums (GDZ)
http://gdz.sub.uni-goettingen.de/

Verlag Kessel
Eifelweg 37
53424 Remagen-Oberwinter
Tel.: 02228-493
Fax: 03212-1024877
E-Mail: nkessel@web.de
www.verlagkessel.de

Druckerei Sieber
Rübenacher Str. 52
56220 Kaltenengers
www.business-copy.com

Auf der letzten Seite befindet sich eine Tabelle,
in der die im Original befindlichen handschriftlichen
Korrekturen bzw. Änderungen zusammengefasst sind.

ISBN: 978-3-941300-09-5

Carl Friedrich Gauss'

Untersuchungen über höhere Arithmetik.

(Disquisitiones arithmeticae. Theorematis arithmetici demonstratio nova. Summatio quarumdam serierum singularium. Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae. Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio prima et secunda. Etc.)

Deutsch herausgegeben

von

H. Maser.

Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1889.

Vorwort des Herausgebers.

Das Studium der herrlichen Geisteserzeugnisse unseres unsterblichen Gauss ist für jeden Mathematiker, der es ernsthaft mit seiner Wissenschaft meint, eine unabweisbare Pflicht. Grossen Dank ist man daher der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen schuldig, dass sie durch Veranstaltung einer billigen in einzelnen Bänden erhältlichen Ausgabe der Gauss'schen Werke im Originaltext jedermann in den Stand gesetzt hat, sich dieselben anzuschaffen. Wenn nun trotz der leichten Erhältlichkeit des Originals hier noch der Versuch mit einer deutschen Ausgabe der *Disquisitiones arithmeticae* und der in lateinischer Sprache geschriebenen im zweiten Bande der Gesammelten Werke enthaltenen zahlentheoretischen Abhandlungen gewagt wird, so hat dies in der Erwägung seinen Grund, dass eben die sprachlichen Schwierigkeiten des Originals für viele Leser keine geringen sind und um so drückender empfunden werden, als das Verständnis des Inhaltes selbst, und zwar nicht bloss beim ersten Studium desselben, eine sehr bedeutende Geistesthätigkeit erfordert und alle Kräfte in Anspruch nimmt. Der des Faches kundige Gelehrte wird allerdings lieber zum Originale greifen. Denn wie in den Augen des Kenners ein Werk der Skulptur oder Malerei zwar durch die Gediegenheit und Bedeutung des behandelten Stoffes und durch die Feinheit in der Anordnung und Ausführung der einzelnen Teile Anerkennung findet, aber erst durch die Thatsache, dass es Original ist, seinen wahren Wert erhält, so auch ein Werk der schöngeistigen oder fachwissenschaftlichen Literatur. Nur das Originalwerk zeigt uns die Genialität seines Schöpfers im vollen Glanze und erfüllt uns mit jenem geistigen Vergnügen, welches die Bewunderung grosser Männer gewährt. Da nun die *Disquisitiones arithmeticae* ein durch seinen Inhalt wie durch seine Form hervorragendes klassisches Werk sind, so kann das Studium derselben im Originaltext nicht dringend genug empfohlen werden. Wem es aber zunächst nur darum zu thun ist, mit dem Inhalte selbst bekannt zu werden, der wird es jedenfalls dankbar annehmen, wenn es ihm durch Hinwegräumung äusserer Schwierigkeiten ermöglicht wird, seine ganze Aufmerksamkeit auf die Sache zu richten. Daher darf man sich immerhin der Hoffnung hingeben, dass die vorliegende deutsche Ausgabe vielen Lesern sehr willkommen sein wird.

Was nun diese Ausgabe selbst anlangt, so hätten in dieselbe von den kleineren Abhandlungen wohl nur die von Gauss selbst veröffentlichten aufgenommen werden sollen; ich habe aber auch die in seinem Nachlasse vorgefundenen, im zweiten Bande seiner Werke enthaltenen Fragmente nicht ausschliessen wollen, weil sie noch manches Goldkörnchen, manche wertvolle Bemerkungen und interessante Sätze enthalten, obwohl sie weder sachlich noch formell vollkommen druckfertig genannt werden können und daher wohl in der Gesamtausgabe seiner Werke aber nicht hier einen Platz beanspruchen durften. Um den Character und Geist der Gauss'schen Arbeiten möglichst rein und frei von jedem Beiwerk wiederzuspiegeln, habe ich mich aller eigenen Anmerkungen enthalten und nur die bereits sanctionierten, von Herrn Professor Dedekind herrührenden Bemerkungen zu einigen Abhandlungen mit gütiger Erlaubnis des Verfassers aus dem zweiten Bande der Göttinger Ausgabe übernommen.

Für diejenigen, denen dieser Band selbst nicht zur Hand ist, füge ich zur Orientierung hier noch einige daraus entnommene Notizen hinzu. An einigen Stellen der *Disqu. arithm.* wird auf einen achten Abschnitt verwiesen, obwohl ein solcher nicht vorhanden ist; ferner haben die hier mitgeteilten Artikel aus der „Lehre von den Resten" und die Abhandlung auf Seite 678 eine eigentümliche Numerierung. Es findet dies dadurch seine Erklärung, dass Gauss seine ursprünglichen Aufzeichnungen, welche den Titel „*Analysis residuorum*" tragen, einer gänzlichen Umarbeitung unterzog, aus welcher die *Disquisitiones arithmeticae* hervorgingen, deren achter Abschnitt die auf Seite 589 u. ff. mitgeteilten Untersuchungen zum Gegenstande haben sollte. Als zu umfangreich wurden diese Untersuchungen aber schliesslich von den *Disqu. arithm.* ausgeschlossen und der achte Abschnitt einer eingehenderen Betrachtung der Lehre von der Kreisteilung vorbehalten, daher das darauf bezügliche Fragment (Seite 678) sich in der Numerierung seiner Artikel unmittelbar an die *Disqu. arithm.* anschliesst. Die Artikel in den beiden Abschnitten aus der „Lehre von den Resten" tragen dieselben Nummern wie im ursprünglichen Manuskript.

Vor einigen Jahren ist von mir eine Ubersetzung des so überaus selten gewordenen Legendre'schen Werkes „*Théorie des nombres*" herausgegeben worden; es sei mir erlaubt, meiner Freude darüber Ausdruck zu geben, dass es mir vergönnt war, auch das zweite und bedeutendere klassische Werk über Zahlentheorie, die *Disquisitiones arithmeticae* von Gauss, dem mathematischen Publikum in deutscher Sprache zu überreichen. Ich hoffe damit der Wissenschaft auch einen kleinen Dienst erwiesen zu haben.

Berlin, im März 1889.

Der Herausgeber.

Vorrede des Verfassers zu den Arithmetischen Untersuchungen.

Die in diesem Werke enthaltenen Untersuchungen beziehen sich auf denjenigen Teil der Mathematik, der es mit den ganzen Zahlen zu thun hat, während die gebrochenen Zahlen meistenteils, die imaginären immer ausgeschlossen bleiben. Die sogenannte unbestimmte oder Diophantische Analysis, welche aus unendlich vielen dem unbestimmten Problem genügenden Lösungen diejenigen auszuwählen lehrt, welche ganzzahlig oder wenigstens rational sind (meistens auch noch unter der Bedingung, dass sie positiv seien), ist nicht jene Disziplin selbst, sondern vielmehr ein sehr specieller Teil derselben und verhält sich zu ihr ungefähr so, wie die Kunst, die Gleichungen zu reduzieren und aufzulösen (Algebra), zur gesamten Analysis. Wie nämlich in das Gebiet der Analysis alle Untersuchungen gehören, welche über die allgemeinen Eigenschaften und Beziehungen der Zahlgrössen angestellt werden können, so bilden die ganzen Zahlen (und die gebrochenen, insofern sie durch ganze bestimmt werden) den eigentlichen Gegenstand der Arithmetik. Da aber das, was gewöhnlich unter dem Namen Arithmetik gelehrt wird, kaum über die Kunst zu zählen und zu rechnen (d. h. die Zahlen durch geeignete Zeichen etwa nach dem dekadischen Systeme darzustellen und die arithmetischen Operationen auszuführen) hinausgeht, mit Hinzufügung noch einiger Sachen, die entweder gar nicht zur Arithmetik gehören (wie die Lehre von den Logarithmen) oder doch wenigstens nicht den ganzen Zahlen eigentümlich sind, sondern für alle Zahlgrössen gelten, so scheint es sachgemäss zu sein, zwei Teile der Arithmetik zu unterscheiden und das Erwähnte zur elementaren Arithmetik zu rechnen, dagegen alle allgemeinen Untersuchungen über die eigentlichen Beziehungen der ganzen Zahlen der höheren Arithmetik, von der hier allein die Rede sein wird, zu überweisen.

Zur höheren Arithmetik gehört das, was Euclid in den „*Elementen*" Buch VII u. ff. mit der bei den Alten gewohnten Eleganz und Strenge gelehrt hat; doch beschränkt sich dies auf die ersten Anfänge dieser Wissenschaft. Das berühmte Werk des Diophant, welches ganz den Problemen aus der unbestimmten Analysis gewidmet ist, enthält viele Untersuchungen, welche wegen ihrer Schwierigkeit und der Feinheit der Kunstgriffe eine nicht geringe Meinung von dem Geiste und Scharfsinn ihres Verfassers erwecken, besonders wenn man die Geringfügigkeit der Hülfsmittel bedenkt, welche ihm zu Gebote standen. Da aber diese Aufgaben mehr eine gewisse Gewandtheit und geschickte Behandlung als tiefere Prinzipien erfordern und überdies zu speciell sind und selten zu allgemeineren Schlüssen führen, so dürfte dieses Buch mehr aus dem Grunde eine Epoche in der Geschichte der Mathematik bilden, weil es die ersten Spuren einer characteristischen Kunst und der Algebra in sich enthält, als weil es die höhere Arithmetik mit neuen Entdeckungen bereichert hat. Bei weitem das Meiste verdankt man den Neueren, von denen zwar nur wenige Männer, aber Männer von unvergänglichem Ruhme, wie P. de Fermat, L. Euler, L. Lagrange, A. M. Legendre, den Zugang zu dem Heiligtume dieser göttlichen Wissenschaft erschlossen und gezeigt haben, von wie grossen Reichtümern es überfüllt ist. Ich unterlasse es jedoch hier anzuführen, welche Entdeckungen von jedem einzelnen dieser Geometer ausgegangen sind, da man dies aus den Vorreden zu den Zusätzen, mit denen Lagrange Euler's Algebra bereichert hat, und zu dem bald zu erwähnenden erst kürzlich erschienenen Werke von Legendre erfahren kann und überdies die meisten an gehöriger Stelle in diesen Arithmetischen Untersuchungen Erwähnung finden werden.

Der Zweck dieses Werkes, dessen Herausgabe ich schon vor fünf Jahren versprochen hatte, war der, die Untersuchungen aus der höheren Arithmetik, die ich teils vor teils nach jener Zeit angestellt habe, zur allgemeineren Kenntnis zu bringen. Damit sich aber Niemand wundere, dass ich die Wissenschaft hier fast von ihren ersten Anfängen an wiederholt und viele Untersuchungen von Neuem aufgenommen habe, mit denen sich schon andere beschäftigt haben, glaube ich darauf hinweisen zu müssen, dass ich, als ich mich zuerst im Anfange des Jahres 1795 dieser Art von Untersuchungen zuwandte, von allem dem, was von Neueren auf diesem Gebiete geleistet worden war, nichts wusste und aller Hülfsmittel, durch welche ich mir davon hätte einige Kenntnis verschaffen können, baar war. Während ich nämlich damals mit einer andern Arbeit beschäftigt war, stiess ich zufällig auf eine ausgezeichnete arithmetische Wahrheit (wenn ich nicht irre, war es der Satz des Artikels 108), und da ich dieselbe nicht nur an und für sich für sehr schön hielt, sondern auch vermutete, dass sie mit anderen hervorragenderen Eigenschaften im Zusammenhang stehe, bemühte ich mich mit ganzer Kraft, die Prinzipien, auf denen sie beruhte, zu durchschauen und einen strengen Beweis dafür zu erhalten. Als mir dies endlich nach Wunsch gelungen war, hatten mich die Reize dieser Untersuchungen derart umstrickt, dass ich sie nicht mehr verlassen konnte; so kam es, dass, während das Eine immer zu dem Andern den Weg bahnte, das in den vier ersten Abschnitten dieses Werkes Mitgeteilte grösstenteils erledigt war, ehe ich von ähnlichen Arbeiten anderer Geometer etwas zu Gesicht bekommen hatte. Als mir darauf Gelegenheit wurde, die Schriften dieser grossen Geister durchzusehen, erkannte ich zwar, dass der grössere Teil meiner Überlegungen längst abgethanen Sachen gewidmet gewesen war, um so lebhafter aber bestrebte ich mich, den Fussstapfen jener folgend, die Arithmetik weiter auszubauen; so wurden verschiedene Untersuchungen angestellt, von denen die Abschnitte V, VI und VII einen Teil wiedergeben. Als ich nach einiger Zeit den Entschluss fasste, die Früchte meiner Anstrengungen zu veröffentlichen, liess ich mich, dem Wunsche vieler nachgebend, um so lieber überreden, auch von jenen früheren Untersuchungen nichts zu unterdrücken, weil es damals noch kein Buch gab, aus dem man die in den Denkschriften der Akademieen zerstreuten Arbeiten anderer Geometer über diese Gegenstände hätte kennen lernen können, sodann weil viele von ihnen vollständig neu und zum grossen Teil nach neuen Methoden behandelt waren, endlich weil sie alle sowohl unter einander als auch mit den späteren Untersuchungen durch ein so enges Band zusammenhingen, dass auch das Neue nicht bequem genug auseinandergesetzt werden konnte, ohne dass das andere von Anfang an wiederholt worden war.

Inzwischen erschien das ausgezeichnete Werk des schon vorher um die höhere Arithmetik hochverdienten Legendre, *Essai d'une théorie des nombres*, Paris a. VI, in welchem er nicht nur alles, was bis dahin in dieser Wissenschaft gearbeitet worden war, sorgfältig zusammentrug und in Ordnung brachte, sondern auch noch sehr viel Neues aus seinem Eigenen hinzuthat. Da mir dieses Buch zu spät in die Hände kam, nachdem bereits der grösste Teil meines Werkes gedruckt war, habe ich es nirgends, wo die Analogie des Gegenstandes Gelegenheit dazu gegeben hätte, erwähnen können; nur hinsichtlich einiger weniger Stellen hielt ich es für notwendig in den Zusätzen einige Bemerkungen hinzuzufügen, die der edeldenkende und aufgeklärte Mann, wie ich hoffe, nicht übeldeuten wird.

Während des Druckes dieses Werkes, welcher mehrere Male unterbrochen und durch mancherlei Hindernisse bis ins vierte Jahr hinausgezogen wurde, habe ich nicht nur diejenigen Untersuchungen, die ich zwar schon früher angefangen, deren Veröffentlichung aber ich auf eine andere Zeit zu verschieben beschlossen hatte, um nicht das Buch allzu umfangreich werden zu lassen, weiter fortgesetzt, sondern noch mehrere andere neue in Angriff genommen. Auch wurden mehrere, die ich aus demselben Grunde nur obenhin berührt habe, weil eine ausführlichere Behandlung weniger notwendig erschien (z. B. die, welche in den Artikeln 37, 82 u. ff. und andern Stellen angeführt sind), später wieder aufgenommen und haben dieselben zu allgemeineren Untersuchungen, die der Veröffentlichung wert erscheinen, Veranlassung gegeben (vgl. auch, was in den Zusätzen über Artikel 306 gesagt ist). Schliesslich habe ich, da das Buch besonders wegen der grossen Ausdehnung des fünften Abschnittes bei weitem umfangreicher geworden war, als ich erwartet hatte, mehreres, was anfänglich für dasselbe bestimmt war, und unter andern den ganzen achten Abschnitt (welcher in diesem Bande bereits an einigen Stellen erwähnt wird und eine allgemeine Abhandlung über die algebraischen Congruenzen jeden Grades enthält) weglassen müssen. Alles dieses, welches mit Leichtigkeit einen mit dem vorliegenden gleichstarken Band ausfüllen wird, werde ich veröffentlichen, sobald sich die Gelegenheit dazu bietet.

Dass ich bei mehreren schwierigen Untersuchungen mich synthetischer Beweise bedient und die Analysis, durch welche dieselben gefunden sind, unterdrückt habe, ist besonders durch das Streben nach Kürze veranlasst, der ich mich soviel wie möglich befleissigen musste.

Die Theorie der Kreisteilung oder der regulären Polygone, welche im siebenten Abschnitt behandelt wird, gehört zwar an und für sich nicht in die Arithmetik; doch müssen ihre Prinzipien einzig und allein aus der höheren Arithmetik geschöpft werden; dies wird vielleicht den Geometern ebenso überraschend sein, wie ihnen hoffentlich die neuen Wahrheiten, die man aus dieser Quelle schöpfen kann, angenehm sein werden.

Hierauf habe ich den Leser aufmerksam machen wollen. Über den Gegenstand selbst zu urteilen, ist nicht an mir. Ich wünsche nichts lebhafter, als dass sie denen, denen der Fortschritt der Wissenschaft am Herzen liegt, gefallen mögen, sei es nun, dass sie bisherige Lücken ausfüllen, sei es, dass sie den Zugang zu Neuem öffnen.

Inhaltsverzeichnis.

Arithmetische Untersuchungen.

Abhandlungen.

Einige Untersuchungen aus dem handschriftlichen Nachlasse von Gauss.

Arithmetische Untersuchungen.

Erster Abschnitt.

Von der Congruenz der Zahlen im Allgemeinen.

Congruente Zahlen, Moduln, Reste und Nichtreste.

1.

Wenn die Zahl a in der Differenz der Zahlen b, c aufgeht, so werden b und c nach a **congruent**, im andern Falle **incongruent** genannt. Die Zahl a nennen wir den **Modul**. Jede der beiden Zahlen b, c heisst im ersteren Falle **Rest**, im letzteren aber **Nichtrest** der andern.

Diese Bezeichnungen gelten in Bezug auf alle **ganzen**, positiven sowohl wie negativen*), Zahlen, sie sind aber nicht auf gebrochene Zahlen auszudehnen. So sind z. B. -9 und $+16$ nach dem Modul 5 congruent; -7 ist nach dem Modul 11 Rest, nach dem Modul 3 aber Nichtrest von $+15$. Da übrigens die Null durch jede beliebige Zahl geteilt wird, so ist jede Zahl als nach jedem beliebigen Modul sich selbst congruent zu betrachten.

2.

Sämtliche Reste einer gegebenen Zahl a nach dem Modul m sind in der Formel $a + km$ enthalten, wo k eine unbestimmte ganze Zahl bezeichnet. Von den Sätzen, die wir später aufstellen werden, lassen sich die leichteren hieraus ohne Mühe beweisen; doch wird jeder die Richtigkeit derselben ebenso leicht durch den blossen Anblick erkennen können.

Die Congruenz der Zahlen werden wir im Folgenden durch das Zeichen $\equiv$ andeuten und den Modul da, wo es nötig sein wird, in Klammern hinzufügen: $-16 \equiv 9$ (mod. 5), $-7 \equiv 15$ (mod. 11).**)

---

*) Der Modul ist offenbar stets absolut, d. h. ohne jedes Vorzeichen, zu nehmen.

**) Dieses Zeichen habe ich wegen der grossen Analogie, die zwischen der Gleichheit und der Congruenz stattfindet, gewählt. Aus demselben Grunde hat Legendre in seinem unten öfter zu erwähnenden Werke geradezu das Gleichheitszeichen für die Congruenz beibehalten; doch habe ich Bedenken getragen, ihm darin zu folgen, um keine Zweideutigkeit entstehen zu lassen.