

857799847712228471888867799847712848471888377998477122847188857799477122284

Mathematik als Metapher

Mathematik als Metapher

Ausgewählte Essays

Band 1

YURI I. MANIN

Mit einem Vorwort von

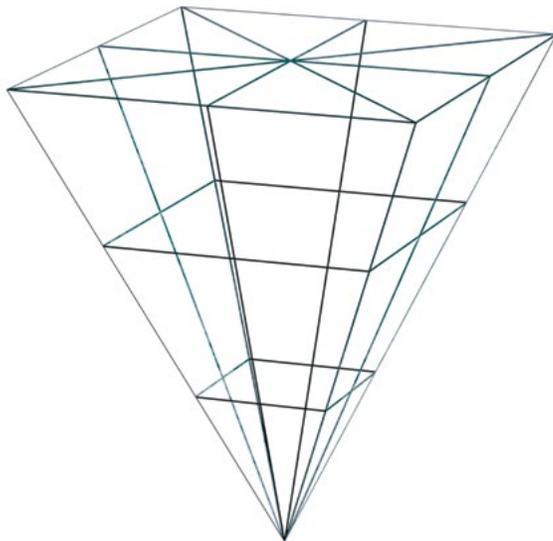
FREEMAN DYSON

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	9
Einleitung	23
Existenzbeweis	37
Mathematisches Wissen	51
Wahrheit als Wert und Verpflichtung	111
Mathematik als Metapher	133
Wahrheit, Strenge und gesunder Menschenverstand	151
Berechenbarkeit und Sprache	179
Georg Cantor und sein Erbe	207
Gödels Theorem	235
Mathematik als Beruf und Berufung	275
Impressum	290

Existenzbeweis

(anstelle eines Vorworts)



In Gedenken an meine Eltern

In diesem Buch sind etwa 20 meiner nichttechnischen Texte versammelt, die zum größten Teil in den letzten dreißig Jahren geschrieben und veröffentlicht wurden. Das Genre des Buches im althergebrachten Sinn sind – Marginalien, Randbemerkungen, Gedankenskizzen, vorbereitende Entwürfe, die nicht zu Theoremen wurden, Definitionen, Romane oder philosophische Abhandlungen.

Die Mathematik, das großartige Handwerk, mit dem ich mich das gesamte Leben beschäftigt habe, dient hier nicht nur als Anlass für nichtmathematische Überlegungen, sondern auch als Metapher der menschlichen Existenz. Diese Phrase sollte nicht esoterisch verstanden werden. In jeder Generation gibt es nur wenige Mathematiker und sie kommunizieren oft über die Köpfe der Zeitgenossen hinweg und über vergangene Jahrzehnte und Jahrhunderte, so wie das Poeten, Musiker, Philosophen tun.

Das Gefühl der Einsamkeit des Langstreckenläufers, das solch ein Leben begleitet, kompensieren verschiedene Menschen auf unterschiedliche Weise. Ich liebte seit der Kindheit alles zu lesen, dessen ich habhaft werden konnte.

Der größte Teil dessen, das mich in der Mathematik beschäftigte, ist mit der algebraischen Geometrie verbunden. Ihr grundlegender Gegenstand ist die Untersuchung der Lösungen von Systemen von Polynomgleichungen mit mehreren Unbekannten. Wenn die Gleichungen ausgewählt und festgelegt sind stellen wir uns die Menge aller ihrer Lösungen, die aus n -Tupeln komplexer Zahlen bestehen, als geometrische Figur vor, als Gebilde im n -dimensionalen (oder $2n$ -dimensionalen) Raum. In manchen

Richtungen erstreckt sich dieses Gebilde bis ins Unendliche, in anderen zieht es sich launisch in sich selbst zusammen. Die Vielfalt und Komplexität solcher Gebilde ist unendlich reicher als alles, was man in modernen Ausstellungen abstrakter Kunst sehen kann. Die Mathematiker lernten, in dieser gewaltigen Welt Regularitäten, Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten zu finden.

Mich haben vor allem Anwendungen der algebraischen Geometrie auf die Zahlentheorie und auf die Physik angezogen. Eine der ältesten Aufgaben der Zahlentheorie, die bis ins antike Griechenland zurückgeht und noch heute den Namen von Diophantos von Alexandria (um 300 n. Chr.) trägt, ist auch mit der Lösung von Polynomgleichungen verbunden. Dabei postulieren wir, dass die Koeffizienten des Polynoms ganze Zahlen sind und fragen: Existieren Lösungen, deren Koordinaten auch ganze (oder rationale) Zahlen sind? Wie viele sind es?

In der Morgenröte unserer Wissenschaft, als die Mathematiker der Antike erst lernten, solche Fragen zu stellen und auf sie Antworten zu finden, führten sogar einfachste Gleichungen zu tiefgründigen Erleuchtungen. Die Tatsache, dass die Gleichung

$$x^2 - 2y^2 = 0$$

keine anderen ganzzahligen Lösungen hat als

$$x = y = 0$$

öffnete die Augen dafür, dass die Welt der geometrischen Größen viel größer ist als die Welt der rational messbaren Größen (die Diagonale des Quadrates ist nicht durch seine Seite bestimmbar). Im Grunde genommen war die euklidische Geometrie auch der Anfang der theoretischen Physik – der Kinematik idealer Festkörper im zwei- oder dreidimensio-

nenen Gravitationsvakuum – und die Versuche, die Form mit Zahlen zu verbinden, führte viel später zur Herausbildung des algebraischen, analytischen und rechnerischen Rüstzeugs der Physik. Die Diagonale des Einheitsquadrats (Quadratwurzel von 2), die Seite des Würfels mit dem Volumen von 2 (dritte Wurzel aus 2) und die Länge π des Kreisumfangs mit dem Durchmesser 1 waren anfänglich physikalische Konstanten, und die uns gewohnten reellen Zahlen wurden in der Geschichte der Mathematik langsam als gewaltige potentielle Heimstatt für die Werte aller physikalischen Größen begriffen. Ganze und rationale Zahlen reichten für die Erkenntnis der Welt nicht aus.

Andererseits brauchten die Menschen für die Beschreibung sowohl der physikalischen Welt als auch der Welt der Ideen, für die Weitergabe vom Lehrer zum Schüler dessen, was schon verstanden ist, für die Bewahrung vorm Vergessen in den folgenden Generationen, Worte, Symbole, Zeichen und eindeutige Regeln des Umgangs mit ihnen. Die Syllogismen von Aristoteles erwiesen sich ebenso als Ausgangspunkt für die Theorie der Sprache der Wissenschaft wie die Entdeckungen von Pythagoras als Ausgangspunkt der theoretischen Physik. Langsam, durch die Scholastiker, durch Leibniz, Boole, Gödel, von Neumann und viele andere, entwickelte sich die Erkenntnis, dass man mit Texten in der Sprache der Wissenschaft genauso umgehen kann wie mit ganzen Zahlen.

Die Erkenntnistheorie als Teil der Philosophie befindet sich außerhalb unserer Erörterung, aber man kann sich auch deren technische Aufgaben vorstellen, wie zum Beispiel die Frage: Kann man aus einem gegebenen Kompendium des Wissens logisch eine Antwort auf eine neue Frage herleiten, oder ist dazu eine Erweiterung der Wissensbasis notwendig?

In mehr als zweitausend Jahren seit Diophantos und Pythagoras stellte sich heraus, dass im Prinzip jede derartige Aufgabe sich auf eine zurückführen lässt, die wir bereits formuliert haben: Gibt es eine Lösung eines gegebenen Systems diophantischer Gleichungen?

Die Wechselwirkung der algebraischen Geometrie mit der Zahlentheorie führte zum Verständnis des erstaunlichen und fundamentalen Prinzips: Die Antworten auf die Fragen von Diophantos zum Gleichungssystem hängen grundsätzlich von den geometrischen Formen des Raumes aller komplexen Lösungen dieses Systems ab.

Zum Beispiel, kann der Raum aller komplexen Lösungen (topologisch) wie eine Sphäre aussehen, oder ein Torus, oder eine Sphäre mit einigen Henkeln. Die Menge der Henkel heißt Geschlecht. Dies ist eine sehr stabile Invariante eines Gleichungssystems und es scheint, dass diese wenig gemeinsam hat mit arithmetischen Feinheiten und diskreten Punkten des Gitters ganzzahliger Vektoren (im Projektionsraum verschwindet der Unterschied zwischen ganzen und rationalen Punkten).

Aber das Geschlecht bestimmt, wann die Menge aller rationalen Lösungen unendlich sein kann: nur wenn es nicht mehr als einen Henkel gibt.

Das ist der Inhalt der berühmten Hypothese von Mordell, mit der ich mich in den sechziger Jahren beschäftigte. Später versuchte ich die Konturen eines Programms herauszuarbeiten, das die Beziehung zwischen geometrischen und diophantischen Eigenschaften für beliebige Dimensionen aufklären kann.

Im Arbeitsinstrumentarium der theoretischen Physik waren bis vor kurzem nur Rudimente der algebraischen Geometrie vorhanden. Die Lage begann sich in den sechziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts zu verändern, als der Apparat der Quantenfeldtheorie und insbesondere der Stringtheorie die algebraische Geometrie in den Vordergrund rückte.

Das gewohnte Bild der Weltlinie eines punktförmigen Elementarteilchens wurde durch Gebilde einer Weltfläche eines kleinen Strings ersetzt.

So eine Fläche sieht aus wie eine (riemannsche) Oberfläche, und ihr Geschlecht – die Zahl der Henkel – entspricht der Anzahl der Schleifen in den Ausdrücken der feynmanschen Amplituden, die seit den vierziger Jahren zum zentralen theoretischen und rechnerischen Arbeitsmittel der Quantenphysik wurden.

Mir gelang es, das sogenannte Maß von Polyakow im Raum der Module (Parameter) der riemannschen Oberflächen zu berechnen, deren Kenntnis für die Berechnung der feynmanschen Integrale notwendig ist.

Es stellte sich heraus, dass sich dieses Maß aus denselben arithmetischen Komponenten zusammensetzt, die eine zentrale Rolle beim vollständigen Beweis der Hypothese von Mordell spielten, der kurz davor von Gerd Faltings gefunden worden war.

Der Kontrapunkt dieser beiden Themen – der Sprache und der Geometrie, der Zahlentheorie und der Physik, der Logik und der Intuition, erwächst ständig in den physikalisch-mathematischen Teilen des Buches.

In der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts schuf das gegenseitige Interesse der Geisteswissenschaftler und Mathematiker eine Atmosphäre, in der eine Zusammenarbeit beginnen konnte. Das Zerwürfnis der beiden Kulturen (C. P. Snow) schien überwindbar zu werden, zumindest in Moskau und Paris. Die Linguisten, angeregt durch die innere Logik ihrer Aufgaben und gleichermaßen durch die wachsenden Möglichkeiten der Computer, begannen die Prinzipien der genauen Beschreibung natürlicher Sprachen herauszuarbeiten; mich hat besonders das bemerkenswerte Bedeutung – Text – Modell der allgemeinen Sprache von Igor Meltchuk beeindruckt. Kolmogorow und seine Schüler beschäftigten sich mit der poetischen Sprache und ihrer Statistik. Semiotiker und Lyriker gingen

aufeinander zu. Es ging nicht ohne Ernüchterungen und Irritationen ab.¹

Allerdings hat mich die Perspektive, meine Arbeitsweise als Mathematiker auf geisteswissenschaftliches Material anzuwenden, nicht verführt. Ich wollte mich darin einleben, wie man sich in ein fremdes Land einlebt, und das Gesehene aufschreiben, weniger mit ganz genauen als mit ausdrucksstarken Worten. (Im Kontext der Literaturwissenschaft hat Susan Sontag solch eine Einstellung erotisches Verhältnis zur Literatur genannt.)

Früchte dieser Träume wurden drei Artikel: *Der Archetyp der leeren Stadt*, *Mythologischer Schwindler* nach Angaben der Psychologie und Kulturtheorie, *Über das Problem früher Stadien der Sprache und des Bewusstseins* (Phylogenese).

Letztlich entstanden alle drei Arbeiten aus dem Wunsch, die Züge der kollektiven Psychologie des menschlichen Verhaltens zu verstehen. Die materialistische Erklärung der Geschichte, die im hölzernen offiziellen Rotwelsch formuliert war, konnte weder ihre unwirkliche Gewalttätigkeit noch ihre schöpferische Leidenschaft erklären. Manchmal schien es, dass die Geschichte nicht von Führern, Klassen und Massen gemacht wird, sondern von einem Haufen Sadisten mit den Händen einer Horde von Masochisten.

Ich habe vom *Archetyp der leeren Stadt* in verschiedenen Motiven der Kunst gehört und von seiner wörtlichen Beschreibung der analytischen Psychologie von Carl Gustav Jung, der ihn als unterbewussten Schatten des *Projektbewusstseins* rationalisierte, der weltliche und religiöse Utopien schafft, manchmal von unwahrscheinlicher Schönheit und Macht. In den kürzlichen Kommentaren von G. Revsin und A. A. Grjakalov wird dieser Archetyp in Diskussionen herangezogen, die der Kunstwissenschaft und

1 »In den Tabellen wollte die Summe der Spalten und die Summe der Zeilen nicht übereinstimmen [...] Allerdings liest kaum jemand Tabellen mit Ziffern: In meinem Buch *Das moderne russische Gedicht* (1974) sind die Zählungen des Taktes bei Blok falsch aufsummiert und deshalb sind alle Schlussfolgerungen daraus falsch, aber in 25 Jahren hat das keiner bemerkt.« Gasparov, M. *Aufzeichnungen und Auszüge*, Moskau, Neue Literarische Rundschau, 2001).

der Philosophie der Kindheit gewidmet sind.

Der mythologische Schwindler erfordert umfangreichere Kommentare.

Viele Jahre hielt ich ein Hausseminar ab, das der Psycholinguistik und der Evolution des Bewusstseins und des Intellekts gewidmet war (das war eine der Varianten des traditionellen Moskauer Zusammensitzens *in der Küche*).

Unter den Teilnehmern und Vortragenden waren Linguisten, Neurobiologen, Psychiater, Philologen. Wir versuchten, gemeinsame Interessen und Fragen zu finden, bei denen verschiedenes fachliches Wissen, Gewohnheiten und Erfahrungen zu irgendetwas Neuem führen könnten.

Ich vertiefte mich nach und nach in Gedanken, die sich nur ein Dilettant erlauben kann. Ich versuchte mir die Entstehung der Sprache als System des Sozialverhaltens vorzustellen.

Die Methoden der vergleichenden Sprachwissenschaft erlauben es, das Vokabular und die Grammatik ursprachlicher Zustände in der vor-schriftlichen Zeit zu rekonstruieren. Sie bauen auf dem Vergleich phonetisch und semantisch ähnlicher Worte verwandter Sprachen auf, und anschließend (z.B. in den nostratischen Sprachen) auf dem Vergleich der phonetisch und semantisch ähnlichen rekonstruierten Wurzeln. Mit jedem Schritt der Rekonstruktion nimmt die Menge des erhalten gebliebenen Materials exponentiell ab, deshalb kann die vergleichende historische Sprachwissenschaft nicht weiter zurück als (10-13)·1000 Jahre v. Chr. kommen, d.h. bis zur frühen Jungsteinzeit (natürlich kann man diese glot-tochronologischen Datierungen präzisieren und anfechten). Das Heranziehen genetischer Daten (Luigi Cavalli-Sforza) bestärkt und vertieft das erhaltene Bild, aber über die eigentlichen Sprachen sagt sie nichts aus.

Unterdessen entwickelte sich der Mensch voraussichtlich zwischen 330 000 und 100 000 Jahren v. Chr. und ich versuchte mir vorzustellen, wie dies vor sich gehen konnte.

In Kürze stelle ich meine Gedanken in der Form einer Reihe trockener und vereinfachter Thesen vor.

a) In den historisch beschriebenen Gesellschaften tauchten zuweilen Menschen auf, deren Niveau der Redekompetenz um Größenordnungen das Niveau normaler, sogar gebildeter und aktiver Persönlichkeiten, übertraf. Man erinnere sich an solche Koryphäen der Nationalsprachen wie Dante, Shakespeare und Puschkin. In den vor-schriftlichen Gesellschaften waren wahrscheinlich die Schöpfer der *Odyssee* und des *Gilgamesch* solche Menschen.

Ich nahm an, dass dasselbe in bedeutend archaischeren Stadien der Sprachentwicklung geschah. Es erschienen Menschen, durch die sich noch nicht eine herausgebildete Sprache artikuliert, die von einem mutierten Gehirn erzeugt wurde. Diese Proto-Sprache drang durch Proto-Schamanen und Proto-Poeten gewaltsam in die sprachlose Umwelt ein.

b) Die Proto-Sprache entwickelte sich parallel mit dem Proto-Bewusstsein.

Die anfänglichen Funktionen sowohl der Sprache als auch des Bewusstseins waren nicht kognitiv. Sie bestanden in der Einführung eines psychischen Mechanismus, der *angeborene, instinktive, tierische Reaktionen und Verhaltensstereotypen* aufhalten konnte.

Die Proto-Sprache lieferte ein Signalsystem, das die Stilllegung solcher Reaktionen beinhaltete; sie konnte internalisiert werden und begann die Basis der individuellen Psyche zu bilden.

Eine immer ausdrucksstärkere Sprache erlaubte es außerdem einzelnen, besonders begabten Individuen, das Verhalten anderer Menschen zu kontrollieren und damit am Ende *alternative Realitäten* der Religion, Literatur, Philosophie und Wissenschaft zu schaffen.

c) Endlich führte die sich entwickelnde Asymmetrie der rechten und linken Gehirnhälfte, die die Entwicklung der linguistischen Kompetenz des frühen Menschen begleitet, leicht dazu, was man in modernen Termini-

ni als akute neurotische Störung bezeichnen könnte. (In der Literatur gibt es ähnliche Spekulationen, die auf anderen Grundlagen basieren, z.B. auf der Evolution des Sexualverhaltens vom tierischen zum menschlichen).

In einem Stadium der Rekonstruktion verstand ich, dass die Gestalt, die sich meinem Vorstellungsvermögen darstellte, auffällig einem mythologischen Schwindler ähnelte (in der englischen Variante einem Trickster). Ich begann, breit gefächerte Literatur über Trickster zu lesen. Die Zeugnisse bekräftigten, dass Trickster überall in der Welt überdurchschnittliche Sprachfähigkeiten besaßen und gleichzeitig abgründige Neurotiker waren.

Die darwinsche Evolution war den Genen der Trickster wohlgenigt, da deren stürmische sexuelle Aktivität vom Talent der Manipulatoren begleitet war. Die traditionelle Rolle des Tricksters als weiser Berater des Machtzentrums gab ihm weitere zusätzliche Reproduktionsvorteile.

Mein Artikel über den Trickster wurde 1987 in der *Priroda* publiziert.

Erst vor kurzem erfuhr ich, dass etwa zur selben Zeit, im Jahre 1988, eine Gruppe von Forschern ein Buch mit dem Namen *Machiavellische Intelligenz*² veröffentlichte.

Der Inhalt wurde im zweiten Teil dieses Buches³ wie folgt kurz zusammengefasst: »[...] die anfängliche Triebkraft der Evolution der Intelligenz war die Auslese nach der Effektivität des manipulativen Sozialverhaltens innerhalb von Gruppen, wo die schwierigsten Aufgaben, die vor einem Individuum standen, mit der Notwendigkeit der Zusammenarbeit mit anderen Mitgliedern der Gruppe verbunden waren.«

Die Autoren (oder Redakteure) schlugen den Terminus *Machiavellische Intelligenz* gerade dafür vor, um bildlich diese Erfahrung der sozialen Manipulierung auszudrücken. Die Feldforschungen deckten deren Anlagen

2 *Machiavellian Intelligence: Social expertise and the evolution of intellect in monkeys, apes and humans.* R.W. Byrne, A. Whiten (Hrsg.) Oxford: Clarendon Press, 1988.

3 *Machiavellian Intelligence II: Extensions and evaluations.* R.W. Byrne, A. Whiten (Hrsg.) Cambridge University Press, 1997.

bereits in den Gemeinschaften von Primaten auf.

Der Trickster meiner Vorstellung stimmte wunderbar mit dieser Beschreibung überein.

1942 ging mein Vater an die Front, wo er nach einem Jahr ums Leben kam. In den letzten Tagen, die er zu Hause war, wollte er – wie ich denke – mit mir zusammen sein und mir etwas lehren, an das ich mich lange erinnern sollte. »Morgen gehen wir Fische fangen«, sagte er.

Am folgenden Tag machten wir uns am Morgen auf den Weg und hielten am naheliegenden großen Bewässerungskanal an (das war in Tschardschou, wohin nach der Evakuierung aus Simferopol das pädagogische Institut der Krim verlegt wurde). Im Kanal floss braunes Lehmwasser. Ich war fast sicher, dass keine Fische dort leben können, und überhaupt, wie kann man sie fangen? (Ich war 5 Jahre alt).

Der Vater zerbrach zwei Weidengerten, entfernte die Blätter und brachte jeweils einen Faden an, am Ende der Fäden waren zwei gekrümmte Stecknadeln, die die Haken ersetzten. Auf die Nadeln steckte er Brotkrumen. Mir kam ein furchtbarer Verdacht: Der Fisch verschluckt die Nadeln, er bekommt große Schmerzen und wenn wir ihn herausziehen, kann er nicht atmen und stirbt. Ich hatte Angst, auch nur ein Wort zu sagen.

Der Vater warf die Angeln aus. Es passierte nichts, die Fäden bewegten sich im trüben Wasser.

Endlich sagte der Vater mit einem Seufzer, dass es Zeit sei, nach Hause zu gehen, zog die Angelleinen heraus und schaute auf die Brotkügelchen.

Sie waren leicht abgenagt! Das heißt, es lebten Fische im Kanal, aber wir hatten keinen getötet!

Das Glück, das ich empfand, als ich diese beiden Entdeckungen machte, blieb die Hauptlektion meines Vaters und ich habe sie bis heute nicht

vergessen.

Beim Ersinnen meines individuellen Mythos beschloss ich, dass dies meine erste ontologische Erfahrung war, der *Existenzbeweis* nach indirekten Anzeichen.

Mein gesamtes intellektuelles Leben wurde durch das geformt, was ich bedingt Aufklärungsprojekt nannte. Seine Grundprämisse bestand im Glauben, dass der menschliche Verstand den allerhöchsten Wert besitzt und die Verbreitung der Wissenschaft und der Aufklärung selbst unausweichlich dazu führt, dass bessere Menschen als wir in einer Gesellschaft leben werden, die besser als unsere ist.

Nichts, was ich um mich herum in den zwei Dritteln des vorigen Jahrhunderts und im zu Ende gehenden ersten Jahrzehnt des neuen Jahrhunderts beobachtet habe, hat diesen Glauben bestätigt.

Aber trotzdem glaube ich nach wie vor an das Aufklärungsprojekt.

Zum Abschluss möchte ich meinen herzlichen Dank allen meinen langjährigen Lehrern, Freunden und Gesprächspartnern ausdrücken. Es ist unmöglich, sie alle aufzuzählen, aber von ihnen und aus ihren Büchern habe ich alles erfahren, was ich weiß (oder denke zu wissen).

Meine besondere Erkenntlichkeit gilt Xenia und Mitja.

Mitja hatte die Idee, dieses Buch zusammenzustellen, und als es begann sich anzubahnen, übersetzte er einige mir sehr wichtige Arbeiten für die Ausgabe der englischen Fassung.

Die Ratschläge, die Kritik, die Ermunterung und die Liebe von Xenia haben all‘ die Arbeit wie auch das ganze Leben begleitet.

Impressum

Mathematik als Metapher, Ausgewählte Essays, Band 1, 1. Auflage, 2016.

TEXTE

Vorwort © Freeman Dyson, 2007, zuerst erschienen als ›Foreword‹ in Y. I. Manin. *Mathematics as Metapher. Selected Essays*. AMS, Providence, Rhode Island, 2007, S. vii–xi. Mit freundlicher Erlaubnis von Freeman Dyson.

Einleitung © Y. I. Manin, zuerst erschienen als ›Introduction‹ in *Selected Papers*. *World Scientific Series in 20th Century Mathematics*. vol. 3, World Sci., Singapore, 1996.

Existenzbeweis © Y. I. Manin, zuerst erschienen als ›Доказательство существования‹ in *Математика как метафора*. Moskau, МЦНМО, 2008 (in Russisch), S. 5–12.

Mathematisches Wissen © Y. I. Manin, zuerst veröffentlicht in *Mathematics and Culture*. Vol. 2, C. Bartocci, P. Odifreddi (Hrsg.) Einaudi, 2008.

Wahrheit als Wert und Verpflichtung © Y. I. Manin, Vortrag mit dem Titel ›Truth as Value and Duty: Lessons of Mathematics‹ auf dem *International Symposium of the Balzan Foundation ›Truth in the Humanities, Science and Religion‹*, Lugano, 2008. Publiziert in: *Truth in Science, the Humanities and Religion–2010*. Session II: Mathematics # Physics and Cosmology (Kai Hauser, Paolo de Bernardis). International Balzan Foundation (Hrsg.) With kind permission of Springer Science+Business Media.

Mathematik als Metapher © Y. I. Manin, zuerst erschienen als ›Mathematics as Metaphor‹ in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians August 21–29, 1990*, Kyoto, Japan, Volume II. Ichiro Satake (Hrsg.) With kind permission of Springer Science+Business Media.

Wahrheit, Strenge und gesunder Menschenverstand © Y. I. Manin, zuerst erschienen als ›Truth, Rigour, and Common Sense‹ in *Truth in Mathematics*. H.G. Dales, G. Oliveri (Hrsg.) Clarendon Press, Oxford, 1998. By permission of Oxford University Press.

Berechenbarkeit und Sprache © Y. I. Manin, zuerst erschienen als ›Вычислимость и язык‹ in *Berechenbares und nicht Berechenbares*. Sowjetisches Radio, Serie Kybernetik, Moskau, 1980 (in Russisch).

Georg Cantor und sein Erbe © Y. I. Manin, Vortrag auf der Tagung der DMV und Verleihung der Cantor-Medaille 2002, zuerst publiziert als ›Georg Cantor and his Heritage‹ in: *Algebraic Geometry: Methodes, Relations, and Applications: Collected papers dedicated to the memory of Andrei Nikolaevich Tyurin*. Proc. Steklov Inst. Math. **246**, S. 195–203, 2004. Mit freundlicher Genehmigung des Steklow Instituts für Mathematik in Moskau.

Gödels Theorem © Y. I. Manin, zuerst erschienen in *Priroda*, 1975, N°12. (In Russisch)

Mathematik als Beruf und Berufung © Y. I. Manin, zuerst erschienen als »Mathematics as Profession and Vocation« in: *Mathematics: Frontiers and Perspectives*. V. Arnold et al. (Hrsg.) AMS, S. 153-159, 2000. Mit freundlicher Erlaubnis der International Mathematical Union.

Es konnten nicht alle Rechteinhaber ermittelt bzw. kontaktiert werden. Falls Sie Rechte geltend machen möchten, melden Sie sich bitte beim Verlag.

BILDER

Porträts von Georg Cantor und Kurt Gödel © Igor Oster, 2016.

Satellitenfoto S. 91: Karthago, Tunesien: © Earth Observatory NASA: Carthage, Tunisia, August 14, 2010, <http://earthobservatory.nasa.gov/IOTD/view.php?id=45211>, Aufruf am 31.01.2016.

Semantische Darstellung S. 189 nach *Математика как метафора*. Moskau, МИИМО, 2008, Abb. 1, S. 66 bzw. nach I. A. Meltschuk. *Opyt teorii lingvističeskich modelej »Smysl ↔ Tekst«*. Moskau, Nauka, 1974, S. 671.

Eiweißsynthese auf S. 198-201 nach *Математика как метафора*. Moskau, МИИМО, 2008, Abb. 2, S. 72.

Alle anderen Fotos und Abbildungen © Marietta Ehret, 2015, 2016.

ÜBERSETZUNG

Existenzbeweis, Berechenbarkeit und Sprache: Aus dem Russischen von Steffen Unger; alle anderen Essays aus dem Russischen und Amerikanischen von Steffen Unger und Marietta Ehret.

AUSGABE

Die Rechte dieser Ausgabe liegen bei e-enterprise, Verlag für Wissenschaft, Kultur und Fotografie, Horstweg 69, 32657 Lemgo, www.e-enterprise.de, info@e-enterprise.de.

Alle Bilder und Texte sind urheberrechtlich geschützt. Vervielfältigung, Kopie oder Speicherung sind ohne schriftliche Erlaubnis nicht gestattet.

DRUCK UND BINDUNG

Printer Trento, Italien

ISBN

978-3-945059-21-0

